La favola della sezione aurea

Manuel Bastioni, matr. 17896

7 settembre 2001

Indice

1 Il numero d'oro: un mito.

1.1 L'intelligente Hans, il cavallo matematico

Nel libro intitolato *Il pallino della matematica*, Stanislas Dehaene riporta un interessante aneddoto molto adatto per rappresentare la fortissima influenza che possono avere le attese di chi esegue un esperimento o una qualsiasi ricerca sui risultati stessi.

> All'inizio del secolo, nella buona società tedesca, un cavallo di nome Hans raggiunse gli onori della cronaca. Il suo padrone, W. von Osten, non era un addestratore di circo come tutti gli altri, ma un appassionato, seguace delle teorie di Darwin, che si era prefissato come missione di dimostrare quanto fosse grande l'intelligenza degli animali. Von Osten impiegò più di dieci anni ad insegnare al suo cavallo l'aritmetica, la lettura, la musica. I risultati, che richiesero molto tempo, superarono tuttavia le aspettative: il cavallo sembrava veramente dotato di un'intelligenza superiore; era in grado di risolvere problemi di matematica e anche di compitare delle parole.
>
> Gli spettacoli nei quali veniva presentato l'intelligente Hans (*der kluge Hans*) si svolgevano spesso nel cortile di casa von Osten. Il pubblico si disponeva in semicerchio attorno all'animale e proponeva al suo padrone una domanda di aritmetica: "Quanto fa 5 + 3?". Von Osten disponeva davanti all'animale cinque oggetti su un tavolo e tre su un'altro. Dopo aver esaminato gli oggetti davanti a lui, il cavallo dava la sua risposta battendo con lo zoccolo una serie di colpi pari al totale dell'addizione. Ma le capacità di Hans non finivano lì. Il pubblico aveva anche la possibilità di porre direttamente ad alta voce le domande all'animale, oppure di scriverle in caratteri arabi su pannelli, ed il cavallo rispondeva con altrettanta facilità. [...]Nel settembre del 1904, una commissione di esperti, che comprendeva anche l'eminente psicologo tedesco C. Stumpf, concluse, dopo un esame approfondito, che non vi era alcun trucco e che le esibizioni dell'animale erano veritiere. Questa conclusione ottimistica, tuttavia, non convinse O. Pfungst, uno degli studenti di Stumpf. ([17], pag.14)

Non fu facile, ma alla fine Pfungst dimostrò che il cavallo reagiva alle attese di chi gli poneva la domanda. Il suo padrone era del tutto in buona fede, tuttavia, involontariamente comunicava all'animale il momento esatto in cui doveva interrompere il conteggio con lo zoccolo. Il cavallo continuava a comportarsi bene addirittura quando von Osten era assente, forse perchè riusciva a percepire la crescente tensione del pubblico, tuttavia esso non possedeva nessun tipo di conoscenza matematica, ma *rispondeva in funzione di ciò che da lui la gente si aspettava.*

Cosa centra questo con l'architettura e la sezione aurea? Beh, tra breve vedremo come la storia di Hans si ripeta anche in questi campi, ad esempio quando si vuol far spuntare a tutti i costi la la famosa proporzione in qualche importante monumento, o quando si conducono dei test di psicologia con lo scopo di dimostrare che il rapporto d'oro ha delle forti qualità estetiche. Anche in questi casi spesso il monumento o le persone 'rispondono' in base a ciò che da loro la gente si aspetta. É accaduto per le piramidi, per il Partenone, per i soggetti dei primi esperimenti di psicologia...

1.2 Una breve definizione

Prima di iniziare una qualsiasi critica, occorre ricordare sommariamente cosa si intenda per *proporzione aurea.*

Si dice che la figura della stella a cinque punte fosse il simbolo dell'antica scuola pitagorica. Essa viene disegnata tracciando le diagonali di un penta-

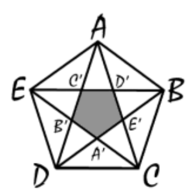

Figura 1: Il pentagramma pitagorico.

gono regolare. Ciascuna diagonale viene intersecata dalle altre in due punti distinti, ad esempio, la $\overline{AC}$ è divisa nei punti D' ed E'. Se consideriamo solo il punto E', la diagonale $\overline{AC}$ viene ripartita in due parti diseguali, una più lunga $\overline{AE'}$ ed una più corta $\overline{E'C}$. Il rapporto tra l'intera diagonale ed il segmento maggiore è uguale al rapporto di questo segmento con il segmento minore. Il punto E' divide la diagonale $\overline{AC}$ con la *sezione aurea.* La stessa cosa sarebbe accaduta considerando D'.

Per gli antichi greci questa costruzione era talmente familiare che non le occorreva alcun particolare nome, per cui era semplicemente definita *la sezione.*

Una delle caratteristiche importanti di questo rapporto è che esso si autoriproduce, o volendo usare un termine preso dalla teoria dei frattali, si sviluppa in forme *autosimili*. Sembra un concetto complesso ma non lo è: prendiamo un segmento $\overline{AB}$ diviso in base alla *sezione* nel punto P_1, dove $\overline{AP_1}$ è il segmento più lungo. Se con un colpo di compasso riportiamo la lunghezza di $\overline{P_1B}$ dentro $\overline{AP_1}$ troveremo un nuovo punto P_2 che divide $\overline{AP_1}$ ancora in base alla sezione aurea.

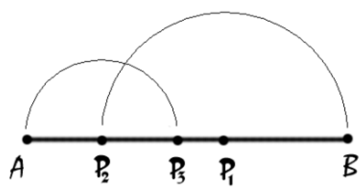

Figura 2: La sezione aurea si autoriproduce.

Dentro questa nuova suddivisione appena operata, $\overline{P_1P_2}$ rappresenta il segmento più lungo, mentre $\overline{AP_2}$ quello più piccolo. Orbene, se ripetiamo la stessa operazione, ruotando stavolta $\overline{AP_2}$ dentro $\overline{P_1P_2}$, dividiamo quest'ultimo con un altro punto P_3 , che riproduce ancora la sezione aurea tra $\overline{P_2P_3}$ e $\overline{P_3P_1}$. Potremmo andare avanti all'infinito, riportando sempre la misura del segmento minore dentro il maggiore, ed ottenendo sempre divisioni tra loro in *sezione*...

Non sappiamo se i primi Pitagorici si siano resi conto di questo procedimento infinito e neppure siamo certi del fatto che nel 500 a.C. fossero stati in grado di dividere in tal modo un segmento. Tuttavia, secondo Carl B. Boyer "sembra molto probabile che essi non solo fossero in grado di effettuare tale suddivisione, ma anche la effettuassero" ([12], pag.61).

Riprendendo il segmento illustrato nella figura 2, e ponendo $\overline{AB} = a$ e $\overline{AP_1} = b$, possiamo impostare il problema come un'equazione di secondo grado, definendo come incognita x la distanza $\overline{P_1B}$. Ricordando la relazione che intercorre tra i segmenti, possiamo scrivere $a : x = x : (a - x)$, e moltiplicando tra loro i medi e gli estremi abbiamo l'equazione $x^2 = a^2 - ax$. Sempre Boyer ci informa che in teoria Pitagora avrebbe potuto saper risolvere questa equazione, magari dopo aver appreso il metodo dai babilonesi. Tuttavia il risultato conduce ad un numero irrazionale, cosa che non era concepita dai Pitagorici, per cui è più ragionevole pensare ad un metodo geometrico simile a quello che si trova sugli Elementi di Euclide, libro II, proposizione 11, e libro VI, proposizione 30, che ho sommariamente riportato in appendice (vedi pag. 44).

Ponendo $a = 1$ otteniamo un'altra definizione del rapporto aureo, quella cioè per cui è *l'unico numero che elevato al quadrato è uguale a se stesso più* *l'unità.*

$$x^2 = x + 1$$

Questa semplice equazione racchiude tutte le caratteristiche della celeberrima *sezione*. Come tale, essa possiede due risultati: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, due numeri irrazionali ormai generalmente indicati[1] con Φ e ϕ. Sarà dunque:

$$\Phi = 1.6180339887\ldots \quad ; \quad \phi = -0.6180339887\ldots$$

É chiaro che, proprio per la loro definizione, questi numeri presentano molte relazioni particolari, a partire dal fatto che entrambi posseggono la stessa parte decimale. Alcune di queste proprietà sono universalmente citate, per cui le riportiamo anche qui; ognuna di esse potrebbe essere una definizione valida:

$$\Phi \cdot \phi = -1 \quad ; \quad \Phi + \phi = 1 \quad ; \quad \Phi - \phi = \sqrt{5} \tag{1}$$

$$\Phi = 1 - \phi \quad ; \quad \phi = 1 - \Phi \tag{2}$$

$$\Phi = -\frac{1}{\phi} \quad ; \quad \phi = -\frac{1}{\Phi} \tag{3}$$

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad ; \quad \phi^2 = \phi + 1 \tag{4}$$

Ovviamente, se tutto fosse limitato alle proprietà puramente matematiche appena elencate, la sezione aurea sarebbe rimasta confinata tra i vari giochi matematici, al pari dei quadrati magici e delle addizioni mentali. La sua fama e l'importanza che ha avuto in migliaia di anni sono invece dovute ad almeno altri due motivi:

1. la presunta valenza estetica e conseguente presenza nell'arte,

2. le svariate proprietà geometriche.

Vedremo tra breve come si tratti di due valori indipendenti e come il primo sia senza fondamento.

1.3 L'aggettivo 'aurea': invenzione del XIX sec.

La maggior parte delle persone sono convinte che termini come 'Sezione aurea' o 'Proporzione aurea' siano antichissimi, risalendo addirittura ai primordi degli studi matematici.

[1]Phi, dall'iniziale del nome del celebre scultore greco, Phidias, che si vuole come uno dei maggiori utilizzatori della sezione aurea. Tuttavia alcuni usano anche il simbolo τ (tau), iniziale della parola greca *tome*, ossia taglio.

Nessuno può fargliene una colpa, poichè esistono svariati libri che riportano tali notizie.

Solo che ovviamente... non è così, poichè ci troviamo davanti ad un prodotto del XIX secolo. A ben vedere il 1800 ci ha regalato una straordinaria quantità di 'leggende', tra l'altro molto difficili da smascherare perché spesso diffuse come verità scientifiche. Se ne è accorto anche Eugenio Battisti, che all'interno della famosa biografia dedicata al Brunelleschi dice:

> L'Ottocento, inoltre, schematizza e rettifica il Brunelleschi nel momento in cui lo misura e lo documenta, semplificandolo proporzionalmente, e dando così adito alle più bizzarre interpretazioni, tipo proporzione aurea. ([3], introduzione)

Per quanto riguarda il nostro discorso basterà ricordare che in questi anni esplose quella che oggi chiameremmo una sorta di *egittomania* o meglio ancora di *classicomania*. Così, mentre i piedi dei tavolini venivano foggiati a mo' di colonne, e le donne della borghesia riscoprivano le acconciature romane, qualcuno inventava nuovi ed esotici nomi per quel rapporto matematico che gli antichi greci chiamavano semplicemente *sezione* o al massimo *divisione in media ed estrema ragione* ([12], p.60).

D'altronde tra breve vedremo come anche la credenza secondo cui le piramidi conterrebbero *intenzionalmente* sia Φ che π abbia inizio da una pubblicazione dell'ottocento (vedi pag.13). Ma procediamo per ordine.

In antichità esisteva l'espressione "il giusto mezzo" o piu' raramente "la media d'oro" solo per indicare *l'annullamento degli eccessi di due direzioni opposte*; qualcosa tipo il detto "la virtù sta nel mezzo", che non aveva nessun legame con la famosa proporzione.

Una prima trasformazione del termine originale, unita anche a molte aggiunte riguardanti le proprietà estetiche di Φ avverrà quasi un millennio e mezzo più tardi, ad opera di Luca Pacioli, che gli dedica la sua opera più famosa, il *De Divina Proporzione*.

Keplero un centinaio di anni dopo riprese il discorso scrivendo:

> La geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l'altro , la divisione in media ed estrema ragione. Possiamo paragonare il primo ad una misura d'oro, e chiamare il secondo un prezioso gioiello.

Qui l'oro va al teorema di Pitagora, mentre Φ si accontenta solo dell'argento. La denominazione attuale invece arriverà ancora più tardi, nel XIX secolo. D. H. Fowler ci riferisce ([24], p. 146) che il termine sezione aurea, o più precisamente *Goldener Schnitt* lo troviamo per la prima volta nel 1835, all'interno del lavoro *Die reine Elementar-Mathematik* di Martin Ohm, fratello del più celebre Georg Simon Ohm, il fisico che ha dato il nome alla misura delle resistenze elettriche[2]. Più influente nella coniazione del nuovo termine fu la pubblicazione da parte di A. Wiegang, del saggio *Der allgemeine goldener Schnitt und sein Zusammenhang mit der harmonischen Teilung*, del 1849.

Infine l'uso di Φ per rappresentare il numero aureo fu introdotta in tempi relativamente recenti dal matematico Mark Barr.

La conoscenza della vera età del termine, oltre a disincantarci rispetto alle sue antiche origini ci offre anche un altro importante spunto di riflessione: furono gli studiosi del XIX secolo ad usare l'aggettivo 'aurea', mentre per i greci era semplicemente un particolare metodo di divisione geometrica *in media ed estrema regione*. E se per gli antichi non fosse stata tanto più importante di altre costruzioni euclidee?

1.4 Le piramidi contengono π e Φ per puro caso.

Vedremo ora come la presenza dei due famosi numeri sia semplicemente una conseguenza non voluta dell'utilizzo di particolari tecniche di misurazione.

1.4.1 Le coincidenze

Gran parte del fascino esercitato da Φ è dovuto alle antiche origini che gli vengono attribuite. Qualcuno cita addirittura uno dei più antichi testi egiziani giunti fino a noi, quello noto come *papiro Rhind*[3], che ad un certo punto parla della *sacra proporzione* utilizzata nella costruzione delle piramidi, anche se non dice affatto quale sia questa proporzione.

Tuttavia *sembra* che Erodoto[4] riferisca di un particolare accorgimento dettato dai sacerdoti egiziani, che volevano l'area di ogni faccia triangolare pari a quella del quadrato avente per lato l'altezza della piramide stessa, misurata a piombo dall'apice del monumento sino al terreno. Il matematico Herbert Westren Turnbull[5] dedica una parte della sua attenzione a tale descrizione all'interno del suo *The Great Mathematicians*, edito intorno agli anni 50:

[2]La stessa notizia si trova all'interno dell'enciclopedia Treccani, alla voce *sezione aurea.*

[3]Prende il nome da Henry Rhind, che nel 1858 acquistò il reperto per portarlo in Inghilterra, anche se lo scriba autore del testo è noto come Ahmes

[4]Storie, c.a 445-425 d.C, Libro II, par.124

[5](n. il 31 agosto 1885 in Tettenhall, Wolverhampton, England — †4 maggio 1961 in Grasmere, Westmoreland, England). Celebre algebrista inglese.

> A certain obscure passage in Herodotus can, by the slightest literal emendation, be made to yield excellent sense. It would imply that the area of each triangular face of the Pyramid is equal to the square of the vertical height. and this accords well with the actual facts. If this be so, the ratios of height, slope and base can be expressed in terms of the Golden Section, of the radius of a circle to the side of the inscribed decagon. In short there was already a wealth of geometrical and arithmetical results treasured by the priests of Egypt, before the early Greek travelers became acquainted with mathematics. . . ([57], pag. 80)

Analogamente anche altri studiosi, come Martin Gardner[26] e David Burton riconoscono le stesse prescrizioni:

> Herodotus related in one passage that the Egiptian priest told him that the dimensions of the Great Pyramid were so chosen that the area of a square whose side was the height of the great pyramid equaled the area of a face triangle.[13]

In effetti bisogna riconoscere che rispettando questa regola, otteniamo un'altra famosa figura geometrica, il *triangolo aureo*[6].

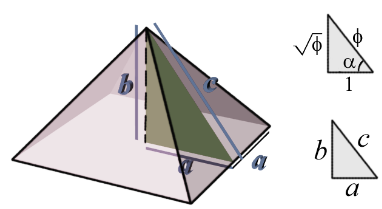

Figura 3: Il triangolo in grado di soddisfare le proporzioni volute dai sacerdoti egiziani sarebbe basato sulla sezione aurea.

Infatti, l'area di ogni faccia triangolare si ottiene con la nota formula

$$\frac{\text{base x altezza}}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{(a \cdot 2) \cdot c}{2} = ac$$

poichè l'ipotenusa c del triangolo in sezione costituisce l'altezza della faccia della piramide. L'equazione imposta dai sacerdoti sarebbe dunque

$$a \cdot c = b^2 \tag{5}$$

[6]Per la precisione uno dei vari tipi di triangoli aurei

dove b è l'altezza della piramide. Applicando sempre al triangolo a, b, c anche il teorema di Pitagora, esprimendolo però in funzione di b^2, stabiliremo anche la relazione $b^2 = c^2 - a^2$, che sostituita nella 5 fornisce

$$ca = c^2 - a^2 \quad \rightarrow \quad c^2 - ca - a^2 = 0$$

Da qui otteniamo i due valori di c:

$$c_{1/2} = \frac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

Trascurando il valore negativo, possiamo calcolare il rapporto che deve esistere tra c ed a :

$$\frac{c}{a} = \frac{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}}{a} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{c} = \Phi \tag{6}$$

In base alla 5 ricaviamo anche b, per cui assegnata la misura a del semilato della base della piramide, le altre dimensioni si calcolavano di conseguenza:

$$b^2 = a^2 \cdot \Phi \quad ; \quad c = a \cdot \Phi. \tag{7}$$

Ponendo $a = 1$ si ottiene il triangolo aureo, di lati $1, \Phi, \sqrt{\Phi}$. Non è chiaro il motivo che avrebbe spinto i sacerdoti egiziani a cercare queste proporzioni, tuttavia bisogna osservare che il triangolo aureo di base 1 semplifica notevolmente molti calcoli trigonometrici, ammesso che gli egiziani avessero un qualche metodo per utilizzare agevolmente Φ e soprattutto la sua radice[7]. Infatti :

$$\tan\alpha = \sqrt{\Phi} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{\Phi}}{\Phi} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\Phi} \tag{8}$$

L'angolo α è dunque di °51 49' 38" 252. Non è possibile prescindere di straordinarie corrispondenze, ad esempio con la piramide di Cheope, le cui misure sono riportate anche nel primo volume della *Storia della Scienza*, dell'Enciclopedia Italiana Treccani:

> [...] La tecnica della piramide di blocchi di pietra raggiunse il suo apogeo nel corso del regno di Cheope (2600 ca.), figlio di Snofru, il quale scelse la pianura di Giza per la costruzione del suo complesso piramidale. Nacque così la "Grande piramide", le cui proporzioni rasentano il rapporto di equilibrio ideale. All'origine il monumento misurava 230 m ca. di lato di base per 147 m ca. di altezza, con facce inclinate di ca. 51°50.

[7]Sappiamo con certezza che gli Egiziani si servivano di approssimazioni già riguardo i numeri razionali; non doveva essere loro di grande utilità lavorare con la radice di un numero irrazionale

In base a questi dati è facile fare qualche semplice calcolo: $a = 230/2 = 115m$; $b = 147m$. Grazie al teorema di Pitagora otteniamo

$$c = \sqrt{13225 + 21609} \rightarrow c = 186,64m$$

A questo punto possiamo verificare il rapporto c/a:

$$\frac{c}{a} = \frac{186,64}{115} = 1,6229$$

che come si vede è vicinissimo a Φ. D'altronde l'area della faccia triangolare risulta essere di $21463,6 \quad m^2$, molto prossima a quella del quadrato dell'altezza, pari a $21609 \quad m^2$. E poi è sin troppo semplice notare che le due inclinazioni praticamente corrispondono.

Seguendo le indicazioni dei sacerdoti egiziani si ottiene anche un altro effetto, che ha scatenato spesso straordinarie speculazioni esoteriche. Infatti esiste anche una relazione approssimata tra Φ e π:

$$\pi \approx \sqrt{\frac{16}{\Phi}}$$

Il reale valore di π è 3.1415..., mentre questa formula fornisce un risultato di 3.1446... Nei pochi passaggi che stiamo per fare chiameremo questo numero π_a. Le conseguenze pratiche di ciò sono molto importanti; tornando alla prima formula della (7), avremo

$$b^2 = a^2 \cdot \Phi \quad \rightarrow \quad b^2 = a^2 \frac{16}{\pi_a^2} \quad \rightarrow \quad b = a\frac{4}{\pi_a}$$

Continuando ci accorgiamo che

$$4a = \pi_a b \quad \rightarrow \quad 8a = 2\pi_a b \quad \rightarrow \quad \frac{8a}{b} = 2\pi_a$$

ma $8a$ non è altro che il perimetro della base della piramide, per cui questa possiede:

> la proprietà geometrica unica che la sua altezza sta nello stesso rapporto al suo perimetro, come il raggio rispetto alla circonferenza di un cerchio ([43], pag. 58).

E questo molti secoli prima che i greci fornissero la definizione rigorosa di π.

1.4.2 La spiegazione

Nonostante tutta questa apparente sapienza matematica ci sono dei validi motivi per non credere che gli egiziani conoscessero realmente tali numeri. A partire dal testo di Erodoto (vedi la figura 4) che non è affatto chiaro, per cui può dare luogo a diverse interpretazioni.

Quelle di Turnbull, Gardner e Burton non sono assolutamente condivise da altri studiosi, tra i quali spiccano Richard Gillings[27], Roger Fischler[23] e George Markowsky[8][40]. Tutti e tre dichiarano che Erodoto fornisce semplicemente le dimensioni della piramide e non parla assolutamente di eguaglianza tra aree. Fischler ha rintracciato l'origine dell'interpretazione 'esoterica',

Τῇ δὲ πυραμίδι αὐτῇ χρόνον γενέσθαι εἴκοσι ἔτεα ποιευμένῃ, τῆς ἐστι πανταχῇ μέτωπον ἕκαστον ὀκτὼ πλέθρα ἐούσης τετραγώνου καὶ ὕψος ἴσον[6], λίθου δὲ ξεστοῦ τε καὶ ἁρμοσμένου τὰ μάλιστα (οὐδεὶς τῶν λίθων τριήκοντα ποδῶν ἐλάσσων).

Figura 4: Il testo originale di Erodoto, ([18], pp. 412)

accorgendosi che, come al solito, essa risale all'ottocento, e precisamente compare per la prima volta nel libro del piramidologista John Taylor, *The Great Pyramid, Why Was It Built and Who Built It?*, pubblicato nel 1859.

Inoltre, se andiamo a leggere una traduzione molto attendibile, e vicinissima a quella letterale, ad esempio delle edizioni U.T.E.T., ci accorgiamo che occorre davvero un notevole sforzo di fantasia per trovare dei riferimenti ad aree e non a semplici misure lineari:

> Per erigere la piramide stessa furono invece necessari venti anni di tempo; è quadrata e ogni faccia ha la base di otto plettri e un'uguale altezza; è formata da blocchi di pietra levigati e perfettamente connessi; nessun blocco misura meno di trenta piedi ([18], libro II, par 124, pag.413).

Il plettro è un'antica unità di misura, pari a 100 piedi, ossia a 30 m circa. Quindi le dimensioni che Erodoto riferisce riguardo i lati sono abbastanza precise, essendo circa 240 m contro i 230 misurati oggi. Un'altezza di otto plettri è invece totalmente errata, risultando quasi il doppio di quella reale. Nonostante questo possa alimentare qualche dubbio, la teoria dell'equivalenza

[8]Ricercatore della IBM e membro della Computer Science Departement of University of Maine.

delle aree sembra più una coincidenza adattata con criteri postumi che un qualcosa di voluto.

Comunque, prescrizione dei sacerdoti o meno, vi sono almeno due ipotesi sensate che spiegano la geometria della piramide, e dimostrano che non era assolutamente necessario una conoscenza della sezione aurea o del famoso pi greco. Una è riportata nel libro di Gillins ([27], pp. 185-187), e riguarda la necessità di mantenere costante una determinata pendenza, mentre l'altra, molto attendibile ed esauriente, viene spiegata in modo chiaro nell'interessante libro di Kurt Mendelssohn[9] , ed è stata pensata da un ingegnere elettronico: T.E. Connolly ([43], pagg. 78-79). Si basa su di un concetto fondamentalmente semplice, per cui gli egiziani avrebbero usato due unità di misura, una per le piante ed una per gli alzati. Infatti le corde in fibra di palma si sarebbero rivelate troppo imprecise per le lunghe distanze, inducendoli ad usare una grande ruota, di diamentro ben definito, una specie di odometron[10]. E come se noi facessimo un ragionamento di questo tipo:– prendo una ruota di 1 m di diametro e poi faccio un edificio largo 10 giri e alto 10 m –. Ovviamente otterrò una costruzione le cui dimensioni sono tra loro in rapporto di π.

Secondo questa teoria gli egiziani avrebbero usato il semplicissimo rapporto[11] di 1:4, con 'calcoli' del tipo "prendo una ruota del diametro di 1 cubito, faccio 200 'cubiti girati' di larghezza e 800 cubiti di altezza[12]".

Così il triangolo in sezione avrebbe avuto una base di $n \cdot \pi$ ed un'altezza di $4n$. In tal modo il perimetro della piramide sarebbe stato di $8 \cdot (n \cdot \pi)$, per cui il suo rapporto con l'altezza avrebbe restituito il famoso 2π.

Inoltre per il teorema di Pitagora l'ipotenusa sarebbe stata quindi pari a $\sqrt{16+\pi^2}$, per cui tutto ciò avrebbe portato *casualmente* gli egiziani non solo ad utilizzare precocemente π nei loro edifici, ma anche, con buona approssimazione il celebre numero d'oro:

$$\frac{\sqrt{16+\pi^2}}{\pi} = 1.61899\ldots$$

Questa teoria è molto credibile, perché spiega perfettamente anche l'inclinazione delle poche piramidi di 43°. E poi è molto più sensato pensare che i sacerdoti avessero individuato il rapporto di 1:4 piuttosto che fossero in grado di dominare numeri irrazionali e trascendenti.

[9] Laureatosi in fisica all'università di Berlino con Plank, Nerst, Schrödinger e Einstein, Kurt Mendelssohn nel 1923 si trasferì ad Oxford dove ottenne per primo la liquefazione dell'Helium.

[10] Si tratta di un antico apparecchio di misura, in cui i giri compiuti dalle ruote di un carro vengono contati e, tramite ingranaggi, tradotti in distanze.

[11] Anche di 1:3 per le poche piramidi di 43° di inclinazione

[12] Non sappiamo quale misura sia stata adottata, questo è solo un esempio di metodo

1.5 Con un po' di impegno, tutto è basato su Φ

E' ovvio che è sin troppo facile giocare con i numeri. Gran parte delle 'scoperte' riguardanti le proporzioni sono basate su dimostrazioni di destrezza aritmetica. Così, senza nessun criterio teorico viene scelto uno spigolo tra i dieci di una modanatura, e viene messo in relazione magari con un quinto della lunghezza della terza finestra a sinistra...

Lavorando in questo modo è possibile individuare rapporti proporzionali praticamente ovunque, anche perchè, per un calcolo probabilistico, all'interno di un qualsiasi scarabocchio composto già solo da qualche decina di linee spezzate si trovano praticamente tutti i rapporti che desideriamo, anche con una tolleranza molto precisa. Tutto sta nello scegliere i punti giusti per sostenere i vari ragionamenti.

Questo non significa che nell'architettura non esistano proporzionamenti modulari, ma sicuramente suggerisce che occorre molta attenzione e professionalità per affrontare uno studio del genere.

Uno degli articoli più critici e fondati realizzato negli ultimi tempi è stato quello pubblicato da Livio Volpi Ghirardini[13] e Marco Frascari[14] in occasione del NEXUS'98[15] dal significativo titolo *Contra Divinam Proportionem*. Qui la sezione aurea viene descritta come una "aurea o divina lente di ingrandimento che *distorce* tutte le regole realmente applicate all'architettura, in nome dell'estetica e di impulsi mistici".

Per i due autori la ricerca della sezione aurea è stata portata avanti da una sorta di fanatici – che essi ironicamente chiamano Φedeli – che ignorando la realtà dell'architettura e le regole di costruzione hanno voluto per forza ritrovare Φ in ogni antica costruzione. La loro critica inizia dai fondatori moderni della teoria, Zeising e Gunter (vedi pag.19), che per provare la presenza della *gold section* ricorsero a degli schemi tracciati su delle foto. A tal proposito Frascari e Ghirardini dicono che:

> [...] senza alcun dubbio Zeising e Gunter sono molto abili a

[13]L'Arch. Livio Volpi Ghirardini lavora a Mantova, ha scritto molto sul Nexus Journal (http://www.nexusjournal.com) ed ha realizzato diverse pubblicazioni in proposito. Di recente ha tenuto, insieme ad altri, un 'corso di perfezionamento in restauro dei monumenti', presso la facolta' di architettura di Firenze. La sua lezione si intitolava 'Restauri di chiese albertiane: il Sant'Andrea di Mantova'

[14]Marco Frascari è docente al College of Architecture and Urban Studies, Virginia Polytechnic Institute and State University. Sul sito di questo college (http://caus5.arch.vt.edu/) si trova un suo curriculum completo.

[15]Il convegno 'Nexus': Rapporti fra Architettura e Matematica', si tiene all'incirca ogni due anni in provincia di Firenze. L'intervento citato è tratto dall'edizione di Fucecchio (FI) del 1998.

> misurare le fotografie, ma è chiaro che nessuno di loro ha mai misurato un edificio.

Infatti, come ben sanno i tecnici, il problema dell'errore di misurazione è molto importante, e spesso viene manipolato a proprio piacere dai ricercatori troppo teorici.

Così, se consideriamo un margine dell'uno per cento al momento del rilievo di due grandezze A e B, il rapporto A/B che ne deriverà avrà una tolleranza del 2%:

$$\frac{0,99}{1,01} < \frac{A}{B} < \frac{1,01}{0,99} \quad \rightarrow \quad 0,98 < \frac{A}{B} < 1,02$$

Questo permetterebbe di accettare come sezione aurea valori che oscillano tra 0.59 e 0.63, includendo quindi una vastissima rosa di rapporti.

Frascari e Ghirardini riportano alcuni esempi *documentati* dell'uso da parte di architetti di proporzioni quali 5/3 e 8/5, facendo notare come questi si avvicinino a Φ, soprattutto considerando il discorso sulle tolleranze. Analogo ragionamento viene fatto da Pierre von Meiss [42], quando dice che la "Golden (Mean) is very close to the ratio of 5 : 8 ".

Questa libertà matematica, unita all'arbitrarietà con cui vengono scelti i riferimenti rende veramente molto semplice trovare Φ in qualunque edificio. Sempre i due già citati autori giungono a dire che "per i credenti di Φ, ogni punto è buono per posizionare il punto". E qui gli edifici rischiano di comportarsi come il buon vecchio Hans.

Certo, la sezione aurea, in quanto conseguenza di molte costruzioni geometriche di base, è stata utilizzata dagli antichi, più o meno coscientemente. Si ritrova infatti in alcuni triangoli rettangoli ed isosceli, nel pentagono, nel decagono, nella stella di David ed in alcune spirali (vedi le appendici a pag. 44), per cui in un modo o nell'altro esce sempre fuori…

Paul-Alan Johnson, nel suo recente libro *The Theory of Architecture: Concepts, Themes and Practices* condivide la teoria di costruzioni geometricamente basilari – per la maggior parte empiriche – come unica base per i tecnici di duemila anni di architettura. Egli scrive che, nel corso della storia, molti architetti hanno posseduto unicamente

> a rudimentary understanding of geometry and design using more or less straightforward permutations on regular polygons and the circle. At the risk of oversimplification, for more than two millennia basilica, domed and vaulted structures, have been generated principally by the projection or rotation of three primary figures – circle, rectangle, triangle ([37], pag. 358).

Ovviamente questo non significa che le planimetrie e gli alzati fossero semplici, anzi, forse il segreto degli antichi stava proprio nel saper fare grandi realizzazioni architettoniche e tecnologiche utilizzando strumenti e regole molto semplici, alcune delle quali veramente perdute[16].

Sempre all'interno del Nexus le idee di Gherardini e Frascari vengono appoggiate anche da un altro storico, Rocco Leonardi, che evidenzia come qualsiasi dilettante della geometria o anche un semplice studente possa accidentalmente costruire delle figure contenenti casualmente la sezione aurea. D'altronde questo punto di vista non è nuovo, come dimostrano le parole dell'eminente storico della matematica Georges Ifrah:

> once knew a professor of mathematics who [. . .] tried to persuade his students that abstract geometry was historically prior to its practical applications, and that the pyramids and buildings of ancient Egypt "proved" that their architects were highly sophisticated mathematicians. But the first gardener in history to lay out a perfect ellipse with three stakes and a length of string certainly held no degree in the theory of cones! Nor did Egyptian architects have anything more than simple devices - "tricks", "knacks" and methods of an entirely empirical kind, no doubt discovered by trial and error - for laying out their ground plans. They knew, for example, that if you took three pieces of string measuring respectively three, four, and five units in length, tied them together, and drove stakes into the ground at the knotted points, you got a perfect right angle. This "trick" demonstrates Pythagoras's theorem [. . .] but it does not presuppose knowledge of the abstract formulation, which the Egyptians most certainly did not have.[33]

Opinione, questa, che si ricollega perfettamente a quanto detto riguardo l'utilizzo da parte degli egiziani di un rullo graduato per la costruzione delle piramidi (vedi pag. 14).

Abbiamo diversi altri esempi riguardanti l'uso involontario della matematica superiore. Sempre all'interno del Nexus Journal, Paul Calter nel suo interessantissimo articolo intitolato *How to Construct a Logarithmic Rosette (Without Even Knowing it)*, dopo aver riportato un paio di noti esempi di rosette realizzate in età classica e medioevale[17], dimostra matematicamente

[16] A tal proposito mi piace citare il caso di eccezionali strumenti musicali, come i violini di Guarnieri del Gesù, costruiti a mano, alcuni addirittura in carcere e tuttavia assolutamente irriproducibili con le moderne tecnologie, nonostante rilievi e ricostruzioni CAD/CAM dell'ordine del micron. . .

[17] Nel battistero di S. Giovanni a Firenze ed a Pompei.

che le curve costruite appartengono alla spirale logaritmica. Ovviamente gli scultori non conoscevano i logaritmi, ma questi vengono ottenuti involontariamente con una semplice costruzione ripetuta, che ho riportato in appendice (vedi pag. 45).

Ma allora i grandi architetti del passato hanno creato straordinarie strutture archi-matematiche per puro caso? No, perlomeno non in tutti i casi. Ma bisogna pensare alla costruzione del rapporto aureo come una delle tante insegnate dalla dottrina geometrica, e non come il retaggio di un'antica e misteriosa sapienza che ha forgiato tutti i principali monumenti della storia. Come il *sacro taglio* dei romani, o la *vesica pisces* (vedi pag. 46), la sezione aurea veniva indubbiamente utilizzata nell'antichità, ma con molta probabilità il suo uso derivava da una pratica empirica, ben lungi dalla profonda conoscenza matematica e simbolico-filosofica che si vuol per forza dare ai suoi utilizzatori. E spesso è presente anche laddove non era stata pensata, perchè implicita in diverse figure elementari.

In realtà, forse l'unico monumento sul quale non abbiamo problemi di misurazioni ed attribuzioni è il Teatro di Epidauro, che contiene dei riferimenti *discreti*: i 55 gradini divisi in due parti, una di 34 e l'altra di 21, che si trovano tra loro in un rapporto vicinissimo a Φ. Per altri casi, incluso il celebre Partenone, i punti sono scelti arbitrariamente, ad esempio ritrovando Φ nel rapporto tra larghezza (considerando anche quello dei gradini dello stilobate) e altezza (misurandola solo sin dove arriva il triangolo interno, che doveva ospitare le sculture, ed evitando lo spessore del tetto...). Lo stesso dicasi

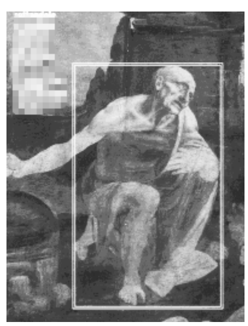

Figura 5: Il San Girolamo di Leonardo, disturbato dal proprio braccio!

anche per Φ che viene 'ritrovata' anche in molte opere d'arte, vasi, sculture e cosi via... Prendiamo per esempio il San Girolamo di Leonardo, che si vuole inscritto in un rettangolo aureo. Osservando la figura 5 viene spontaneo chiedersi per quale motivo un esteta ricercatore dell'equilibrio avrebbe deciso di amputare in malomodo il braccio del santo, ritenendo (chissà per quale motivo) che il esso non dovesse far parte della composizione: un'inutile appendice protuberante senza nessuna importanza visiva, tanto da non essere incluso all'interno sella sacra proporzione.

2 Il fallimento estetico di Φ

L'uso della sezione aurea, ampiamente diffuso durante il rinascimento, subì un duro colpo durante il XVII secolo, quando l'avvento del positivismo lo criticò duramente, relegandolo tra le superstizioni popolari. Da un lato tale atteggiamento eclissò la teoria per quasi due secoli,ma dall'altro fu preparatorio per un nuovo approccio, di tipo scientifico, che sarebbe avvenuto non prima del XIX secolo. Se al'inizio tale verifica sembrava (doveva) dare per forza risultati incoraggianti riguardo la valenza estetica di Φ, con il perfezionarsi dei metodi di indagine le prove di questa supposizione sono divenute via via sempre più vaghe, sino ad un'inversione di tendenza. Oggi i maggiori ricercatori considerano le proprietà estetiche della sezione aurea come una fantasia al pari degli antichi miti.

2.1 L'inizio del dibattito: gli esperimenti di Fechner

Fu Adolf Zeising[18] con la sua prima opera dedicata alle proporzioni del corpo umano [62] seguita da un'altra più celebre riguardante l'estetica [63], a risvegliare l'interesse per la sezione aurea, alla quale tra l'altro venne dedicato il suo – non meno influente – saggio postumo[64].

Le sue teorie vennero ulteriormente appoggiate dal poderoso articolo preparato in sua memoria dal matematico Siegmund Gunter, che pur scrivendo un saggio critico, ammise comunque l'indiscutibile ruolo della sezione aurea nell'estetica antica e moderna.

Il lavoro di questo filosofo rinvigorì la questione proporzionale tanto da stimolare G. T. Fechner ad iniziare i pimi studi di carattere psicologico ([20], pp.100-112) che lo portarono alla massima popolarità nel 1871 con l'ormai celebre relazione che descriveva il metodo sperimentale da lui seguito per verificare la validità estetica della sezione aurea [21]. I procedimenti di indagine furono tre:

1. Il *metodo della scelta* (Wahl), il cui il soggetto sceglie, tra un certo numero di alternative, quella che egli preferisce – o non preferisce – di più.

[18] Filosofo tedesco (Ballenstedt 1810-Monaco 1876). Dopo disavventure politiche si dedicò agli studi filosofici, elaborando una teoria matematico-estetica del bello.

2. Il *metodo della produzione* (Herstellung), in cui al soggetto viene domandato di disegnare, o comunque di creare in qualche modo, un oggetto che abbia delle caratteristiche o delle proporzioni gradevoli – o sgradevoli –.

3. Il *metodo dell'uso* (Verwendung), nel quale il ricercatore esamina oggetti preesistenti l'inizio dei suoi esperimenti, e cerca di stabilire se siano conformi o meno a talune ipotesi di estetica.

I risultati di queste indagini vennero finalmente pubblicati nel 1876 [22]. Fu l'inizio di una disputa destinata a durare sino ad oggi. Stando ai suoi dati, la sezione aurea aveva veramente una grande valenza estetica (vedi la tabella a pag 22). Il conseguente clamore della notizia, e le centinaia di volte che questa venne citata, portarono alla nascita di molti miti e mezze verità, o come diremmo oggi, *leggende metropolitane*.

Persino l'esatta procedura non è mai stata perfettamente chiara. Per utilizzare il suo metodo di scelta, Fechner presentò ai soggetti una serie di 10 rettangoli bianchi su fondo nero[19] ([22], pp. 193-194), che andavano dal rapporto 1 : 1 a quello 2.5 : 1. Tutti i rettangoli avevano uguale area, per evitare che la grandezza assoluta delle figure influisse sulle preferenze dei soggetti interpellati.

Ma già sull'orientamento delle figure nascono i primi dubbi: non sappiamo se Fechner abbia presentato i rettangoli orientati in verticale o in orizzontale. Secondo Lalo ([39], p. 43) e Zusne ([65], p. 400) fu usato l'orientamento orizzontale. Al contrario, Farnsworth ([19], p. 479) ed Eysenck & Tunstall ([44], p. 194), sono convinti che la posizione standard sia da considerarsi quella verticale.

Tuttavia questo è il dubbio minore, soprattutto se confrontato con quello riguardante l'ordine con cui vennero presentate le figure. Qualcuno infatti ha sollevato la questione sul fatto che se i rettangoli fossero stati ripartiti in modo tale che il rapporto aureo si fosse trovato alla quinta o sesta posizione, – ponendosi all'incirca come punto intermedio – in questo modo i risultati sarebbero stati fortemente viziati dalla coincidenza tra valore medio e media degli esiti[20][28].

Comunque, a questo riguardo, il dott. Christopher D. Green[21], dopo un

[19]Negli studi successivi, sia Eysenck & Tunstall[44] che Berlyne[5], opteranno per figure nere su fondo bianco.

[20]Utilizzare la media dei risultati di una prova che restituisce valori ordinati favorisce la possibilità di ottenere, come risultato, semplicemente il valore medio di tutti quelli presentati.

[21]Christopher D. Green, del Department of Psychology York University, North York,

attento esame dei vari documenti, dissipa ogni dubbio, riferendoci, tra l'altro, che:

> Of the ten rectangles Fechner used, the golden rectangle ranked seventh, in order of long-to-short ratio. That is, there were six figures with lower such ratios, and three with larger such ratios.[...] Also, the rectangles were shuffled and placed in a randomly distributed array anew for each subject. In short, Fechner employed a fair approximation of a contemporary randomized procedure (by spatial arrangement, and possibly by orientation) in order to ensure that the effects of extraneous variables canceled each other out. What is more, he did so long before psychologists (inasmuch as there then were psychologists) considered such matters to be important.[29]

Quindi, il rettangolo in sezione aurea si trovava in un punto asimmetrico, e ad ogni soggetto si presentava una nuova sequenza casuale nell'ordine e forse anche nell'orientamento[22].

Lo studioso proseguiva chiedendo di scegliere la figura preferita. Se il soggetto era indeciso, poteva indicare più di un rettangolo. In tal caso il punteggio del test veniva assegnato dividendo l'unità per il numero di elementi selezionati: ad esempio, se venivano presi 2 disegni, il punteggio era di 1/2, mentre se ne venivano scelti 3 era di 1/3 , e così via...

Quando la prima scelta era stata fatta, allora Fechner domandava anche quale era la figura meno piacevole (ma non sempre).

Con tale indagine egli raccolse 347 responsi, ma non è chiaro quanti soggetti egli sottopose alla verifica. Di questi, il 35% espresse una preferenza per la sezione aurea.

Gli altri due valori di preferenza più elevati, 20.6% e 20%, vennero registrati rispettivamente per il rettangolo immediatamente precedente ed immediatamente seguente quello in sezione aurea[23].

Per contro, nessuno dei soggetti selezionati selezionò il rettangolo aureo come rettangolo peggiore e solo lo 0.4% e lo 0.8% selezionarono quello subito prima e quello subito dopo. Il meno favorevole fu quello in rapporto di 1:2.5, con il 35.7% seguito a ruota dal quadrato, con il 27.8%.

Ontario M3J 1P3 CANADA, si occupa da tempo della materia. Le sue ricerche sono finanziate anche dalle University of Toronto Department of Psychology, the York University Faculty of Arts, e the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada

[22]Come è anche confermato dalla disposizione nella tabella riportata sull'*Enciclopedia Universale dell'Arte*, Istituto Geografico De Agostini, Novara, 1981, voce: psicologia dell'arte.

[23]1:1.5 ed 1:1.77

Nella tabella 2.1 sono riportati i valori reali ottenuti da Fechner, paragonati a quelli riscontrati dallo psicologo francese Lalo nel 1908. Per quanto anche quest'ultimo abbia rilevato una forte preferenza per la sezione aurea, si osserva già una distribuzione molto più "allentata", soprattutto riguardo le figure adiacenti a quella aurea. Vedremo come con il passare degli anni e l'affinarsi delle tecniche psicometriche, i risultati diverranno sempre più divergenti da quelli del 1876.

Inoltre Fechner fece altri esperimenti, poco conosciuti, forse perchè i risultati non furono altrettanto eclatanti. Tra questi sembra particolarmente significativo lo studio fatto sulle ellissi. La procedura fu simile a quella già seguita per i rettangoli, solo che stavolta si voleva valutare la valenza estetica del rapporto tra asse maggiore e minore di nove ellissi, che andava dal cerchio – rapp. di 1:1 – ad una figura alquanto schiacciata – 1:2.5 –.

Questa volta il 42% dei soggetti interrogati preferì il rapporto dell'ellisse di 1:1.5, mentre solo il 16.7% si espresse a favore dell'ellisse aurea, che veniva subito dopo quest'ultima. Tutte le altre figure ebbero percentuali trascurabili. D'altronde Frans Boselie, 116 anni dopo otterrà una analoga preferenza per lo stesso valore, sebbene riferito ad altre figure [10], che lo indurrà a smentire le doti del numero d'oro (vedi pag. 38)

Preferenze sui rettangoli				
Rapp.	Migl.re(Fechner)%	Migl.re(Lalo)%	Pegg.re(Fechner)%	Pegg.re(Lalo)%
1	3	11.7	27.8	22.5
0.83	0.2	1	19.7	16.6
0.80	2	1.3	9.4	9.1
0.75	2.5	9.5	2.5	9.1
0.69	7.7	5.6	1.2	2.5
0.67	20.6	11	0.4	0.6
0.62	35	30.3	–	–
0.57	20	6.3	0.8	0.6
0.50	7.5	8	2.5	2.5 12.5
0.40	1.5	15.3	35.7	26.6

Tabella 1: I risultati di Fechner (1876) e Lalo (1908).

Altrettanto negativi furono gli esiti di altre esperienze fechneriane, che puntualmente, risultano altrettanto sconosciute dalla cronaca.

Come abbiamo detto, il metodo della scelta fu solo uno dei tre approcci con il quale Fechner condusse i suoi esperimenti. Utilizzando il metodo dell'uso, egli prese in esame ben 20.000 disegni, provenienti da 22 musei e gallerie d'arte di tutto il mondo, per vedere se i grandi capolavori dell'arte erano stati dipinti su tele i cui lati fossero in proporzione aurea.

Contrariamente alle sue aspettative però, i rapporti erano molto lontani dal famoso numero: i dipinti verticali, presentavano all'incirca una proporzione di 5:4, mentre quelli orizzontali si avvicinavano mediamente a 3:4[24].

2.1.1 Dubbi più seri sugli esperimenti di Fechner

Dunque solo i risultati degli esperimenti fatti con il metodo della scelta sembrerebbero dimostrare l'effettiva preferenza per la sezione aurea (e sono quelli più ottimistici della storia), ma Fechner stesso non è in grado di spiegarne il motivo. Quando gli si poneva la questione, egli rispondeva semplicemente che "if you ask me, I simply say, I do not know"

Ovviamente, questa vaghezza sui risultati e sul motivo che li ha causati non ha favorito la posizione di questo ricercatore nei confronti del mondo scientifico. Molti lo hanno accusato di aver modificato i risultati dei suoi esperimenti, evidenziando anche alcuni risvolti "poco professionali" della sua biografia.

Tra questi uno dei più combattivi è senz'altro McManus, che ha scritto:

> Whilst it is not possible to accuse Fechner of direct, nefarious alteration of his experimental results so that his data fit with his prior theories, we may speculate as to how much Fechner, consciously or subconsciously, produced experimental circumstances which would tend to give him his desired results.[41]

McManus prosegue ponendo l'accento su aspetti non direttamente legati alla teoria aurea, ad esempio sul fatto che egli passò parte della sua vita ad investigare sulla possibilità di intelligenza delle piante, sulla vita dopo la morte e sulla natura degli angeli.

Ma le accuse non terminano certo qui, ed in particolare nascono dal confronto con i moderni metodi di indagine. Potremmo sostanzialmente ridurle a due punti fondamentali.

1. I soggetti esaminati non furono selezionati in maniera casuale.

[24]Tuttavia, onestamente, possiamo dire che questo non smentisce realmente la teoria, poichè fu forse sbagliata la scelta di testare dei quadri – opere di straordinaria complessità – che, come già intuito da Arnheim([2], p.60) contengono troppe "forze visuali", che plasmano e condizionano fortemente la scelta del formato: una battaglia, un panorama, spesso esigono formati estremamente allungati, mentre un ritratto rimane condizionato dalla foggia degli abiti, dalla volontà del committente, dal posto dove si vuole posizionarlo, etc. . .

2. I soggetti potevano essere a conoscenza delle ipotesi di Fechner.

Si tratta di due problemi rimasti insoluti. Tuttavia gli esperimenti di Fechner vennero ripetuti da altri studiosi, che fecero più attenzione al corretto svolgimento delle procedure.

Vedremo tra breve come i risultati delle indagini moderne neghino spesso la facoltà estetica di Φ, e siano a favore solo in determinate condizioni e a determinati patti. Nel leggere quanto segue teniamo sempre presente l'intelligente Hans.

2.2 Gli esperimenti a favore di Φ

Ai fini della nostra esposizione è utile raggruppare i numerosi esperimenti in due categorie: quelli a favore della sezione aurea e quelli contro. Iniziamo dal vedere i test che in qualche modo sono risultati *pro* la valenza estetica di Φ, anche se si tratta di una classificazione molto difficile, poiché persino le esperienze più ottimistiche non sono mai state del tutto a favore del rapporto aureo. Basti pensare a Fecnher stesso che, nonostante sia ritenuto il primo e principale sostenitore della causa di Φ, ebbe successo solo con un metodo di indagine su tre. In effetti gli esperimenti che egli svolse non convinsero pienamente neppure i suoi contemporanei, tanto che un altro studioso, Witmer, sentì il bisogno di rifare i test di Fechner, aggiungendo anche nuove figure, ad esempio dei triangoli isoscele con la base sempre maggiore dell'altezza. Diversamente da lui, tuttavia, egli presentò ai suoi soggetti le figure in successione, una alla volta. In base ai suoi studi, il rettangolo preferito risultò essere quello di rapporto 1:1.651, in verità molto prossimo a quello aureo [59].

Anche per le ellissi i risultati si avvicinarono molto a quelli del suo predecessore, individuando una preferenza per proporzioni abbastanza lontane da quelle auree. Per i triangoli il rapporto altezza-larghezza fu ancora più distante da Φ essendo all'incirca di 0.41:1.

Sebbene per le figure rettangolari Witmer abbia riscontrato un'attrazione verso la sezione aurea, anche egli non aveva una chiara idea del motivo per cui questo avvenisse. Quando gli si poneva questa domanda, le sue risposte erano del tipo "si tratta del giusto mezzo tra una differenza tra forme eccessivamente piccole ed altre eccessivamente grandi". Chiaramente questa non era una spiegazione, e chiaramente la sezione aurea rimaneva legata ai soli rettangoli.

Qualcuno tentò anche di dare una nuova definizione a Φ, che non fosse di origine matematica o geometrica, ma legata a questa sua presunta natura estetica: nel 1893 lo psicologo Oswald Külpe ne fornì una che mi limito solo a riportare: la s.a. è "semplicemente un caso particolare della costanza della discriminazione relativa sensibile, o della legge di Weber"([38], pp. 253-254). Infatti, poiché l'incremento proporzionale è costante dal lato corto a quello lungo, e da tale incremento al lato corto, il piacere per la sezione aurea sarebbe il piacere per differenze apparentemente uguali. In pratica si tratterebbe di "una simmetria di ordine alto"([38], p. 254).

Pochi anni dopo anche Wundt cercò di descrivere la *preferenza estetica*, della quale quella per la sezione aurea sarebbe solo un caso particolare. Secondo questo autore l'*optical feeling* per le forme si manifesta dapprima come una preferenza per le forme regolari rispetto a quelle irregolari. Ad un secondo stadio di cernita tra le figure regolari vengono selezionate quelle che posseggono determinate semplici proporzioni tra le loro varie parti. La più importante tra queste sarebbe la simmetria, o 1:1, e poi la sezione aurea, ossia $x + 1 : x = x : 1$. Il fatto che la simmetria sia generalmente preferita nei rapporti orizzontali, mentre la sezione aurea si trovi di più in quelli verticali deriverebbe dall'associazione con varie forme organiche, primo fra tutti, ovviamente, il corpo umano.

Secondo Wundt, l'unica spiegazione a questa tendenza verso le forme regolari è la facilità della misurazione, vista come un'attività connessa con un particolare piacere derivato dalla sensazione di movimento[61]. Inoltre, secondo questo autore, la preferenza estetica deriverebbe anche da una funzione di associazione con oggetti familiari.

Dunque Wundt, in maniera piuttosto velata, torna di nuovo a proporre le proporzioni del corpo umano come modello, sebbene inconscio, arricchendolo con i concetti di movimento e associazione. L'occhio che trae piacere dal dinamismo di una scena non è un'idea nuova, infatti si ritrova già in William Hogart nella spiegazione di quella che egli chiama preferenza per gli "intrichi":

> L'intrico delle forme. . . lo definirò come quella peculiarità delle linee, che lo compongono, che induce l'occhio ad una specie di caccia a capriccio, e per il piacere che dà alla mente, gli dà diritto del nome di bello. [32]

Man mano che ci avviciniamo alla sperimentazione moderna, i risultati, come già detto, diventano sempre meno netti. E' il caso del parere di Titchener, che tuttavia va inserito ancora tra quelli a favore. Egli nel 1899 propose una sorta di teoria evoluzionistica, per cui inizialmente la simmetria semplice è senz'altro il rapporto più gradevole, ma poi, quando l'uomo raggiunge un alto livello di comprensione estetica, essa viene sostituita dalla divisione aurea ([56], p.324). L'autore non spiegò minimamente se questo avviene per motivi epigenetici, o per motivi culturali strettamente dipendenti dall'ambiente circostante, e tantomeno non seppe dire perché la proporzione di 1:1 dovrebbe perdere la propria bellezza man mano che il senso estetico matura.

Uno degli argomenti che egli utilizzava per sostenere questa sua teoria era rappresentato dall'esperimento in cui venivano preparate molte figure geometriche di tipo semplice – croci, ovali, rettangoli... – di svariate proporzioni, per poi domandare a degli osservatori di scegliere quelli più piacevoli. Pare che la prima scelta cadesse all'incirca sulla sezione aurea, mentre solo successivamente sui rapporti simmetrici.

Un'altra spiegazione, più meccanicistica delle preferenze visive, è quella che vuole questi feelings originati dal movimento dell'occhio. Seguendo questa linea di ricerca, Pierce investigò la "funzione dei movimenti oculari in relazione alla coscienza estetica"([47], p.271) utilizzando esperimenti simili a quelli precedenti, ma aggiungendo una ripetizione delle prove con gli schemi ruotati di 90°. Come era stato previsto, i risultati cambiavano con l'orientamento dei disegni, ma questo non dimostrava che la causa fossero i movimenti oculari.

Anzi, questo genere di ricerca, che poneva in maniera eccessiva l'accento sui movimenti oculari, venne ben presto attaccata da altri ricercatori, e continua ad esserlo sino ad oggi, ad esempio da Zusne, che nel 1970, riprendendo gli esperimenti di inizio secolo di Stratton,[52],[53],mostra che

> [...]symmetry has no particular effect on eye movements either, so that the assumption about a pleasurable effect produced by an even, bilateral distribution of eye movements about an axis of symmetry could not be supported ([65],pp.397-398).

L'opinione di Zusne viene appoggiata anche da molti altri studiosi, come ad esempio Norton e Stark [50]. Possiamo dunque ritenere errata la concezione che le preferenze estetiche siano causate dai movimenti oculari, anche se certamente l'affaticamento degli occhi ha un ruolo – secondario – su ciò che si preferisce vedere.

Come abbiamo visto, Witmer presentò le sue figure in successione, una alla volta. Questo modo di fare divenne tipico anche degli oppositori di Φ, come avremo modo di vedere tra breve (cfr. pag. 31). Occorre tuttavia osservare, come fece il famoso esteta francese Lalo nel 1908 ([39], pag. 44) , che la presentazione seriale non è molto attendibile come prova, soprattutto se effettuata con un grande numero di elementi: essa richiede uno sforzo della memoria non comune, ed è molto difficile che arrivato al cinquantesimo rettangolo il soggetto possa ancora efficacemente fare un confronto, ad esempio, con la quarta figura.

Convinto che questo fosse un grave errore, Lalo nel 1908 riprodusse nuovamente l'esperimento di Fechner. Presentò simultaneamente 10 rettangoli, orientati orizzontalmente, chiedendo ogni volta di indicare il più gradevole ed il meno gradevole. In linea di massima i suoi risultati coincisero con quelli di

Fechner (vedi tab a pag. 22), poichè il 30.3 % dei soggetti scelse il rettangolo aureo, similmente al 35 % di Fechner. Tuttavia laddove quest'ultimo rilevò una forte percentuale anche per le figure adiacenti a quella aurea, con oltre il 40% , Lalo trovò solo il 18.3 %. Inoltre si osserva anche una differenza sostanziale per quel che riguarda i quadrilateri estremi (il quadrato ed il rettagolo di rapporto 1/2.5): le quote che li vogliono migliori, solo del 3 % e del 1.5 % nel 1876, divengono qui dell'11 % e del 15.3 %, anche se ancora una buona fetta di persone le ha indicate come le peggiori (22.5 % e 26.6 %). Quindi quelle che dovevano essere le figure meno gradevoli secondo Fechner, con Lalo giungono ad avere una preferenza totale del 26.3 %, avvicinandosi addirittura al 30.3 % della sezione aurea, che comunque rimane la preferita.

Prima di incontrare di nuovo un test particolarmente favorevole alla sezione aurea, occorrerà aspettare parecchi anni, finchè nel 1932, un altro studioso, Farnsworth, decise di rendere noti i risultati di cinque anni di studio all'interno del suo laboratorio, durante i quali, egli disse, la sezione aurea si trovava sempre al primo o al secondo posto ([19], pag.479).

Tuttavia occorre notare che già nei suoi esperimenti dare un giudizio univoco è tutt'altro che facile: per certi versi alcuni suoi risultati possono addirittura essere considerati contro Φ. Lo studioso comunque era personalmente a favore della sezione, e per convincere il mondo accademico decise di effettuare ulteriori esperimenti ufficiali. Servendosi di 22 soggetti, egli presentò tutte le possibili coppie ottenibili da 9 rettangoli di cartone grigio, le cui proporzioni andavano da 1/1 a 2.5/1. Effettuò le prove sia con l'orientamento orizzontale che con quello verticale. Nel primo caso fu espressa la preferenza per la relazione di 1.5/1, mentre nel secondo vinse la proporzione d'oro. In questo caso la supremazia della 'golden section' era piuttosto labile, trovandosi perlomeno a parimerito con quella di 3/2. Lo stesso Farnsworth volle fare un secondo esperimento, modificando le dimensioni delle figure[25], presentandole colorate di nero su fondo bianco. Questa volta i risultati andarono ancora più contro Φ, poiché non ci fu proprio nessuna prevaricazione: la distribuzione delle preferenze era del tutto omogenea. Lo studioso concluse che

> [...] lo stato di preferenza della sezione aurea è funzione della dimensione e del colore del rettangolo ([19], pag. 481).

Procedendo avanti nel tempo, le prove a favore di Φ si fanno ancora più labili ed evanescenti, e le giustificazioni per la sua presunta valenza estetica diventano forzate e fantasiose. Nell'*ipotesi perimetrica* di Stone e Collins "con un poco di immaginazione" il campo visivo binoculare potrebbe essere

[25] La loro area diminuì da 1162.88 a 14.44 cm^2

circonscritto da rettangolo con un rapporto altezza/larghezza pari a 0.768, e a sua volta potrebbe circonscriverne un altro con rapporto di 0.565. La media tra i due valori, ossia 0.665, è molto vicina a Φ. Dunque motivi come l'imprinting di questa figura sublimale o l'adattamento ad essa spiegherebbero il motivo della preferenza estetica per la sezione aurea. Secondo questi autori, in tal modo si spiegherebbero anche le differenze tra i rettangoli preferiti dagli americani e quelli selezionati dagli europei, già segnalate molti anni prima [60]: si tratterebbe dell'influenza sul campo visivo delle differenti dimensioni delle guance, naso e fronte che hanno le due popolazioni.

Nel 1974 Godkewitsch realizzò un test per dimostrare l'inesistenza delle qualità di Φ, riuscendoci (cfr. pag. 36). Questo esperimento venne ripetuto da Benjafield nel 1976 [4], controllando però con molta attenzione due fattori prima trascurati: l'area delle figure e la possibilità di una scelta graduale. Per quanto riguarda la prima accortezza, egli utilizzò due serie diverse, una in cui le proporzioni venivano variate senza considerare l'area, ed un'altra in cui si faceva attenzione a mantenerla costante. La scelta invece avveniva per gradi: prima il soggetto divideva le figure piacevoli da quelle non piacevoli, poi tra le prime sceglieva quelle molto piacevoli e solo al terzo passaggio, da quest'ultima selezione indicava il rettangolo preferito. Il rettangolo preferito riceveva un punteggio di 3, mentre quelli appartenenti ai "molto piacevoli", ai "piacevoli" e ai "non piacevoli" ottenevano rispettivamente 2, 1 e 0. Per la serie in cui l'area non veniva controllata, i soggetti preferirono molto genericamente le figure larghe. Tuttavia, per l'altra in cui l'area era costante, fu scelta maggiormente la sezione aurea, sia nella serie corta, che in quella media ed in quella lunga. Si trattava del primo esperimento favorevole a Φ dopo molti anni. Nel 1978 Piehl trovò una conferma a questi dati, giungendo alla conclusione che

> [...] when a control for size is introduced and subjects are allowed to gradually articulate their judgments, preference for golden rectangles or rectangles near the golden section emerges ([45], pag. 834)

Nel 1980 McManus fece ulteriori esperimenti, servendosi oltre che dei soliti rettangoli, anche di triangoli proporzionati tra base ed altezza: il risultato fu una distribuzione molto ampia delle scelte, con una leggera preferenza per la sezione aurea.

Rettangoli e triangoli non furono le uniche figure utilizzate in queste indagini. Nel 1977 Svensson [54], con l'aiuto di 24 studenti di psicologia e 24 studenti di arte, realizzò un esperimento in cui andavano divise due linee, una verticale ed una orizzontale, nel punto dove "i segmenti risultanti formano la proporzione più piacevole". Ovviamente, la maggior parte di entrambi i gruppi (37,5%) scelse un rapporto tra 1.5 ed 1.7. La media delle scelte degli studenti in psicologia fu di 1.6, mentre quella degli studenti d'arte fu di 1.55. Ma già Schiffman e Bobko si resero conto che era assurdo fare una simile prova con soggetti così ben istruiti sulla sezione aurea, e nel 1978 rifecero l'esperimento [7] con 8 linee, due orizzontali, due verticali e quattro inclinate rispettivamente di 45 e 135 gradi. La richiesta che essi fecero ai 22 soggetti fu "il tuo compito è quello di usare il pennarello per dividere una linea in modo tale che risultino due segmenti che formino tra loro la proporzione più piacevole". Mentre i risultati di Svensson furono scritti considerando il rapporto lungo/corto, quelli di Bobko furono riportati nella forma corto/lungo. Per la le linee orizzontali la scelta cadde principalmente sullo 0.68 (cioè 1.47 nella forma lungo/corto), per le linee verticali si ebbe 0.60 (1.66), per quelle inclinate di 45° il rapporto fu di 0.57 (1.75) mentre per l'angolo di 135° si ebbe 0.51 (1.96). Ce ne per tutti i gusti...

Sin qui abbiamo parlato dunque degli esperimenti favorevoli alla 'bellezza' della sezione aurea. In questo breve excursus abbiamo osservato come i test più recenti, anche volendo confermare le sue qualità estetiche, contengano un grande margine di incertezze ed ambiguità. Molto più mirati e precisi sono invece i risultati che dimostrano l'inesistenza di tali caratteristiche.

2.3 Gli esperimenti che smentiscono Φ

Le prove della bellezza di Φ vanno dalla certezza matematica della fine dell'ottocento ad una totale confusione ed insicurezza in epoca moderna. Per gli esperimenti tesi a dimostrare l'inesistenza di questa qualità estetica avviene il contrario: da un'iniziale titubanza ottocentesca si giunge alla sicurezza aggressiva degli ultimi anni del millennio. Andiamo per ordine...

Verso la fine del XIX secolo, la sensibilità dei ricercatori riguardo l'enigma della sezione aurea aumentò particolarmente, tanto da trovare nuovi cultori anche oltre oceano. Nel 1894 uscì il lavoro di Edgar Pierce, che presentò un tipo di approccio diverso, in cui considerava anche il bisogno di bilanciamento ed equilibrio[46].

Pierce mostrava tre linee verticali parallele, lunghe 10 cm e larghe 5 cm. Due di queste linee erano preposizionate alla distanza di 60 cm, mentre la terza doveva essere posta dal soggetto in esame, nel punto "più gradevole". Pierce scrive che

> every one...chose as most agreeable a position for the third line roughly corresponding to the golden section([46], p.485).

Tuttavia egli non riporta nessun tipo di dato statistico, e questo potrebbe essere il motivo per cui è stato sistematicamente ignorato da altri autori del campo.

Procedendo nei suoi esperimenti, egli dice di aver appurato che aumentando il numero delle linee, i soggetti tendono a cercare maggiormente il vero punto medio. Ad esempio, tra tre linee poste alla distanza assoluta rispetto ad un punto di riferimento, rispettivamente a 0, 20, 60 cm, i soggetti a cui veniva chiesto di posizionarne una quarta, la ponevano all'incirca al punto distante 40 cm.

Pierce interpretò questi risultati come il bisogno di equilibrio tra varietà e semplicità, già enunciato secoli prima dagli antichi. Un pattern di tre linee è semplice, per cui ha bisogno della varieta di una divisione disuguale, mentre quelli formati da quattro, cinque o sei linee si presentano già molto vari, ed hanno bisogno della semplicità di una divisione disuguale.

Una interpretazione più realistica è forse offerta dalla teoria per cui tre o più linee creano un bisogno di distribuzione regolare, anche se apparente. In più si potrebbe aggiungere che gli esperimenti di Pierce "costringevano" i soggetti a continuare una suddivisione iniziata da lui stesso. Nonostante tutto egli conclude che il *bilanciamento* simmetrico sia una suddivisione esteticamente più importante della *sezione aurea*.

Questo innescò la prima diatriba tra i difensori di quest'ultima e quanti davano primaria importanza alla simmetria.

Durante i primi decenni del XX secolo la psicologia stessa assunse connotazioni più critiche e scientifiche, ed i metodi di indagine precedenti furono rivisti alla luce di nuove teorie, tra cui spiccava, per il forte sostegno delle esperienze sperimentali, la *gestalt*.

Una delle prime osservazioni sul metodo seguito nelle indagini visive – del tipo usato da Fechner – fu fatta da Angier, che nel 1903 denunciò il famoso problema che poteva derivare considerando la media dei risultati:

> such a total average may fall wholly without the range of judgments of every subject concerned, and tell us nothing about the specific judgments of any one ([1], p. 542).

Angier stesso poi fece un significativo esperimento concernente la sezione aurea: chiese ai suoi nove soggetti di dividere una linea orizzontale nel punto più piacevole, ma fece loro ripetere tale operazione per ben 72 volte a testa.

Il risultato fu che la media delle proporzioni disegnate fu veramente molto vicina alla sezione aurea – 0.600 – ma Angier tenne conto anche del fatto che su nove persone, solo due scelsero il rapporto aureo con una certa regolarità. Questo confermò il suo sospetto, e gli permise di dichiarare che la sezione aurea era un'astrazione matematica e non un ideale estetico universale.

Al contrario, le sue attenzioni si rivolsero rapidamente alla simmetria, secondo lui ben più importante ed universale, poichè in grado di dare luogo a

> [...] a corresponding equivalence of bilaterally disposed organic energies, brought into equilibrium because acting in opposite directions.

Angier riduce tutto alla disposizione simmetrica di energie organiche, mettendola sul piano fisiologico. Quindi nessun motivo spirituale, nessun sentimentalismo: il tutto e' visto come un problema organico, strettamente collegato ai battiti cardiaci, alle reazioni muscolari etc... L'approccio fisiologico di Angier sembrerebbe derivare dall'allora popolare *teoria delle emozioni* di William James, basata proprio su questo principio.

James si proponeva di combattere "la teoria del senso comune", secondo la quale, quando a qualcuno viene chiesto perché trema, di solito risponde: "Perché ho paura", oppure, alla domanda perché piange, replica: "Perché sono triste". Queste risposte implicano la convinzione che prima vengono le sensazioni, le quali, a loro volta, producono gli aspetti fisiologici ed espressivi delle emozioni. Secondo lo psicologo americano, bisogna combattere quest'idea, dal momento che non piangiamo perché siamo tristi, ma ci sentiamo tristi perché piangiamo; non tremiamo perché siamo spaventati, ma proviamo paura perché stiamo tremando. Il cuore non batte più in fretta perché siamo arrabbiati, ma siamo in collera perché il cuore batte più in fretta. Angier teorizza che poiché anche l'attrazione per la simmetria e' legata in questo modo alle sensazioni fisiche, essa sia diminuita quando l'uomo moderno ha penalizzato il proprio corpo a favore di una vita fisicamente (atleticamente?) meno attiva.

Sulle orme di Angier, Haines e Davies [16] continuarono a criticare le esperienze di Fechner e Witmer. Innanzitutto essi fecero notare che Fechner aveva distribuito tutti i suoi rettangoli con il medesimo orientamento oppure tutti in posizione casuale, ma non aveva mai considerato l'orientamento come fattore estetico. Inoltre, presentandoli tutti contemporaneamente, alcuni si trovarono quasi al margine del campo visivo, mentre altri erano proprio nel punto di migliore messa a fuoco. Quest'ultima critica non poteva essere però rivolta anche a Witmer, colpevole tuttavia, secondo i due ricercatori, di aver svolto il test sotto l'effetto di numerosi fattori distraenti.

Per eliminare ogni perplessità essi ripeterono di nuovo l'esperimento, utilizzando una grande quantità di rettangoli, e chiedendo ogni volta qualcosa del tipo: – si o no ? –. La risposta veniva data, oltre che con la voce, con dei gesti ben precisi, toccando la figura in caso di accettazione o spostandola nel caso di rifiuto. I parallelepipedi furono divisi in quattro categorie, basate sulla lunghezza del lato che rimaneva invariato: 80, 90, 100 e 120 mm. L'altezza andava dai 25 mm sino a 5 mm in meno del lato base, mentre gli intervalli di incremento erano di 2.5 mm per i rettangoli con base di 80 e 90 mm, e di 5 mm per i rettangoli con base di 100 e 120 mm. In questo modo vennero ottenute delle figure tipo 80 x 25, 80 x 27.5, 80 x 30, oppure 100 x 25, 100 x 30, 100 x 35 etc... In tutto vennero ottenuti 21 rettangoli da 80 mm, 24 da 90, 15 da 100 e 19 da 120.

Gli esperimenti si svolsero su due gruppi di persone: ad un primo gruppo di 11 soggetti furono presentati tutte le classi di rettangoli, mentre ad un secondo gruppo composto da 12 persone furono presentati solo quelle da 80 e 90 mm di base.

Per evitare il problema della media, i risultati dell'esperimento furono presentati strettamente in forma tabulare. Con il primo gruppo furono effettuate 605 prove (55 rettangoli per 11 soggetti), di cui solo 130 furono accettate. Tra queste 130 figure, solamente 16 (12.3%) ricadevano all'interno di un range "aureo", oscillante tra 0.58 e 0.66. Questo malgrado che sui 55 rettangoli presentati, ben sette (12.7 %) rispondessero a tali proporzioni.

Per quanto riguarda il secondo gruppo, tra i 552 rettangoli esaminati (46 x 12, con 6 all'incirca aurei), ne furono scelti 70. Tra questi, solo 12 (17.1 %) ricadevano nell'intervallo della famosa sezione.

Ovviamente queste percentuali dimostrano che la sezione aurea non ha esteticamente alcuna prevalenza: è bastato all'incirca dimezzare la quantità di figure auree contenute tra quelle mostrate, portandola dal 30% di Fechner al 12% di Haines and Davies, per ottenere un crollo delle preferenze.

Questo primo risultato non pose certo la parola fine alla faccenda, così nel 1917 E. L. Thorndike effettuò nuovi test. I risultati anche questa volta risultarono confusi e evidenziarono l'assoluta inesistenza di una prevalenza estetica da parte di Φ. Egli prese 12 rettangoli [26] e li presentò a grossi numeri di persone, oltre il centinaio. Ogni volta chiese prima di indicare il preferito, poi il secondo preferito, il terzo etc... fino a riordinarli tutti. Le figure avevano la stessa altezza, e variavano solo la larghezza in modo da coprire una gamma che andava da 1.3/1 sino al 3.75/1. Nessuna proporzione prevalse nettamente sulle altre, anche se il rettangolo (di poco) più selezionato fu quello di proporzione pari a 1.8.

La questione venne accantonata per ben 14 anni, finché, nel 1931, un altro psicologo, C. O. Weber, riprese gli esperimenti sulla mitica proporzione. Egli utilizzò un metodo diverso , una sorta di ibrido tra quello che mostrava contemporaneamente tutte le figure e quello che le visualizzava una alla volta.

[26] Rifece l'esperimento anche con triangoli, croci e motivi vari.

Il metodo della "paired comparisons" era basato sul mostrare i rettangoli due a due, in tutte le combinazioni possibili. Furono disegnate 9 figure, quadrato, $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{4}$,$\sqrt{5}$, Φ e altri quattro rettangoli interpolati tra questi[27]. Venne chiesta la collaborazione di 68 soggetti, che ripeterono l'esperimento dopo due settimane. L'area dei parallelepipedi era costante, calcolata in 20 cm^2 ciascuno. Anche questa volta, tra una sostanziale omogeneità di risultati, la simpatia maggiore fu assegnata al rettangolo di proporzione 1/1,871, anche se per poco (15 %).

L'anno successivo, nel 1932, il ricercatore F. C. Davis utilizzò esclusivamente il metodo della produzione. Egli domandò a 310 soggetti di disegnare il rettangolo più gradevole, ripetendo la prova dopo 40 minuti. Risultato: la distribuzione si articolava chiaramente attorno a tre rapporti pari a 1.72/1, 2.02/1 e 2.22/1. Questi con buona approssimazione corrispondono a $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{5}$. Nessuna traccia di Φ, o per essere più precisi, una preferenza del 3%. Davis aggiunse che comunque era difficile distinguere bene Φ da $\sqrt{3}$.

Nel 1946 fu la volta di Thompson, che fu il primo a porre il problema anche in funzione dell'età dei soggetti. Per ottenere dei risultati in questo senso, egli si servì di ben 400 soggetti, divisi in gruppi di 100. Un primo gruppo era composto dai bambini dell'asilo, altri due dai ragazzi delle medie e delle superiori, e l'ultimo era formato dagli studenti universitari. Furono preparati 12 rettangoli neri su fondo bianco, proporzionati da 0.25 a 0.75, senza porre nessun vincolo riguardo l'area, tutti presentati in posizione orizzontale. Si domandava di scegliere il preferito, poi, dopo, il secondo preferito, poi il terzo e così via...

I bambini più piccoli non mostrarono alcun tipo di preferenza. Medie e superiori preferirono semplicemente rettangoli molto ampi, scartando quelli di forma stretta ed allungata. Solo gli studenti universitari, al contrario, scelsero rapporti oscillanti tra 0.55 e 0.65. Se notiamo che le figure ampie si avvicinano strettamente al quadrato, questi strani risultati sembrerebbero confermare le ipotesi di Titchener (vedi pag. 25), per cui la preferenza estetica in tenera età si manifesterebbe nei confronti delle forme simmetriche, mentre maturando si giungerebbe alla sezione aurea. Al contrario di Titchener, tuttavia, Thompson si pone il problema del perché questo accada, ma la questione si rivela assai complessa. La maggior parte dei suoi soggetti non aveva mai sentito parlare della sezione aurea ([55], pag. 57), per cui poteva trattarsi di una facoltà innata. Tuttavia se fosse stato così si sarebbe manifestata anche in età molto giovane, per cui occorreva pensare a qualche tipo di contaminazione culturale indiretta. Per il mio modo di vedere le cose il problema passa in secondo piano, essendo propedeutico alla preferenza visiva

[27] Tranne che tra $\sqrt{3}$ e Φ

per Φ: nei soggetti adulti essa non fu quella che riscosse maggior successo, e comunque parliamo di *posizioni* medie [28] nell'ordine di scelta che vanno dal 2.8 del rapporto 0.55 al 3.6 del rapporto di 0.65.

L'esperimento di Thompson aveva trascurato però un fatto importante: l'ampiezza dell'area. La preferenza dei bambini per i rettangoli ampi poteva essere dovuta non alla forma, ma al fatto che l'area fosse più grande, e quindi più invitante. Shipley, Dattman, e Steele [58] si preoccuparono di ripetere l'esperimento, ma con l'accortezza di diminuire il numero di rettangoli (6 invece di 12) per poter fare due serie di figure, una con altezza costante, l'altra con area costante. I bambini continuarono a preferire i rettangoli ampi, in maniera più accentuata nelle prove con uguale altezza (posizione media di 1.5) che in quelle con uguale area (pos. media di 4.7)

Per quel che riguarda gli studenti universitari le cose peggiorarono: furono ancora scelti maggiormente i rettangoli di proporzione pari a 0.65, ma la posizione media non era un granché, solo di pochissimo superiore ad altre (4.7).

I rapporti tra proporzioni ed età furono investigati anche da Neinstadt e Ross [14], che vollero valutare i gusti di soggetti di età oscillante tra i 61 ed i 91 anni. Essi testarono 50 anziani e 100 studenti universitari, secondo la metodologia già usata da Thompson e gli altri. Gli studenti preferirono di nuovo il rapporto di 0.65, ma anche stavolta questo risultato non è affatto schiacciante (scelta media di 4.0). Il meno votato fu il rettangolo di 0.75 (scelta media di 6.0 - 7.5). I gusti degli anziani si rivelarono invece molto omogenei, con una vaga preferenza verso le figure ampie. Per la serie con area uguale essi scelsero di più il rettangolo di rapporto di 0.75. Questi risultati parlano da soli.

Nel 1966 Schiffman [48] aiutò fortemente *l'ipotesi perimetrica* (cfr. pag. 27), smentendo però paradossalmente la preferenza per la sezione aurea. I suoi esperimenti si basavano sull'osservazione per cui se le qualità estetiche di Φ erano dovute alla forma del campo visivo, i soggetti dovevano logicamente preferire i rettangoli orizzontali anzichè quelli verticali. Per verificare ciò, egli chiese a 36 soggetti di disegnare il rettangolo "esteticamente più piacevole": 35 persone, ossia il 97 % disegnarono figure orizzontali, confermando quindi le sue idee. Allo stesso tempo però, la media dei rapporti ottenuti in questo modo era di 0.525, molto lontana da Φ.

Qualche anno più tardi, nel 1969, Schiffman riprodusse l'esperimento, stavolta con l'aiuto di 115 soggetti, tutti di sesso maschile [49]. Quasi il 90 % di loro disegnò rettangoli orientati orizzontalmente, ma ancora una volta la

[28] Se in due prove un rettangolo viene scelto una volta per primo e una volta per quinto, la sua posizione media equivale all'esser stato scelto per terzo: $\frac{5+1}{2}$.

proporzione media fu di 0.489. Da un secondo esperimento, riportato sempre all'interno dello stesso articolo, la sezione aurea esce ancora più malconcia. Dopo aver mostrato a 25 uomini tutte le possibili coppie formate da sei rettangoli di varie dimensioni, orientati sia verticalmente che orizzontalmente, non emerse nessun tipo di preferenza. I rettangoli erano realizzati in modo da contenere le proporzioni di 0.318, 0.418, 0.518, 0.618 (Φ), 0.718 e 0.818. Non solo le scelte furono omogenee, ma confutarono persino i risultati del primo esperimento, poichè il 57 % dei soggetti selezionò i rettangoli verticali.

In un terzo esperimento, Schiffmann utilizzo solo venti uomini, ed escluse il rettangolo di rapporto 0.818. Anche questa volta non vi fu nessuna preferenza, a parte una lieve tendenza verso le figure strette, ossia di rapporto inferiore a 0.5. Il 51% dei soggetti scelse rettangoli verticali.

Nonostante questi esperimenti abbiano dimostrato quasi in maniera inconfutabile l'inesistenza della preferenza per la sezione aurea e della teoria del perimetro, nel 1970 Hintz e Nelson [35] continuarono ad indagare su di esse. La loro supposizione era che se le preferenze estetiche erano dovute alle proporzioni del campo visivo binoculare, le loro variazioni dovevano essere accompagnate da differenti variazioni di queste ultime. Quindi, servendosi di 14 rettangoli, che variavano il rapporto dei loro lati tra 0.10 ed 1.00, valutarono le preferenze di 20 soggetti, di cui conoscevano con precisione le dimensioni del campo visivo. Il coefficiente che risultò tra quest'ultimo ed il rettangolo preferito fu di 0.279.

Al di là di questo "legame', a noi interessa il fatto che anche qui la sezione aurea non comparve mai, poichè la scelta media fu di 0.558. Come se non bastasse, per completare l'esperimento, ad ogni soggetto fu chiesto di disegnare il rettangolo ritenuto "migliore". Risultato: 80% dei rettangoli orizzontali, ma proporzione media pari a 0.545, molto lontana dalla sezione aurea. L'anno successivo i due tentarono un esperimento estremo [36], totalmente indipendente dal senso della vista. Utilizzarono due gruppi di soggetti: un primo formato da non vedenti congeniti e non, ed un secondo composto da vedenti bendati. Furono usati 14 rettangoli, di proporzioni variabili tra 0.1 e 1. All'inizio furono mostrati anche quelli di 0.30, 0.60, 0.80. Al solito venne chiesto di scegliere il migliore, poi il più gradedevole tra quelli che rimanevano, e così via, sino a riordinarli tutti. Con una cernita vennero considerati solo quelli che cadevano tra la prima e la seconda scelta, che furono riutilizzati per una seconda prova, nella quale venivano mostrati tre a tre. La procedura venne ripetuta finchè il numero di figure non si ridusse a cinque. Queste cinque vennero ripresentate di nuovo facendo attenzione a comporre tutte le possibili combinazioni tre a tre. La preferenza modale dei non vedenti congeniti fu per i rettangoli di 0.10, ma la loro preferenza media fu di 0.50. I non vedenti non congeniti invece ebbero una preferenza modale di 0.6, ma una media di 0.615. Per i soggetti semplicemente bendati invece i valori furono rispettivamente 0.6 e 0.558. Per i non vedenti non congeniti e per i vedenti dunque, la sezione aurea avrebbe anche un valore tattile. Ma le scelte dei non vedenti congeniti lasciano supporre che quantunque fosse vera tale preferenza, essa è un'acquisizione culturale.

In quegli stessi anni Berlyne [5] aveva appunto questo dubbio, anzi era molto propenso a credere che la famosa valenza estetica della sezione aurea fosse totalmente un fatto culturale. I suoi test si svolsero in quella direzione; un suo famoso esperimento fu realizzato con 33 ragazze canadesi e 44 ragazze giapponesi. Anche in questo caso con il solito giro di domande si otteneva un ordinamento dei rettangoli. La prima scelta ebbe come protagonista il quadrato per entrambi i gruppi (27% canadesi e 20 % delle giapponesi), ma nella seconda cernita le americane indicarono figure rettangolari all'incirca della proporzione di 3/2, mentre le asiatiche continuarono a preferire forme molto prossime al quadrato. Quindi non solo vi furono delle scelte ben differenti, ma Φ fu selezionato per primo solo dal 9% delle canadesi e dal 5% delle giapponesi.

Nel 1971 lo stesso autore riconduce le sue ipotesi alla teoria dell'informazione [6], collegandosi all'opera dello psicologo tedesco H. Frank [25], per cui l'unico valore estetico misurabile di qualsiasi oggetto sarebbe l'Auffälligkeit, qualcosa che tradotto fornisce l'idea di una capacità a colpire l'osservatore, a spiccare, a trasmettersi con facilità. Il discorso diventa molto ampio e si serve anche dei modelli matematici dell'informatica [29], tuttavia non si viene a capo del problema riguardante l'esistenza o meno delle proprietà estetiche della sezione aurea.

Nel 1974 uno studente di Berlyne, Godkewitsch [28] fece un esperimento per dimostrare che la preferenza per Φ era inesistente, dovuta solamente al fatto che nella maggior parte dei casi il rettangolo aureo si trovava a metà della serie utilizzata nelle prove, per cui la media dei risultati coincideva con esso. Egli prese tre serie da 9 figure ognuna: rapporti corti, medi e lunghi. Le tre sequenze si sovrapponevano parzialmente, e Φ era presente in tutte: nel penultimo rettangolo della "corta", nel mezzo della "media" e nel secondo della "lunga". Gli esiti confermarono la sua ipotesi: nonostante le figure medie delle tre serie non furono le più scelte, la proporzione media risultò la loro. Ovviamente, nella serie lunga ed in quella corta essa non corrispondeva alla sezione aurea.

Un po' diverso fu l'esperimento di Benjafield, Pomeroy e Saunders [34],

[29] La relazione di base della teoria dell'informazione riguarda la difficoltà di distinguere un segnale in mezzo a tanti altri. Se A sceglie un numero in mezzo ad N numeri, B con domande tipo –il numero è maggiore o minore di x?– dovrà eseguire un numero di prove H dipendenti dalla formula $H = \log_2 N$

poichè basato sulle linee. Nel 1980 essi prepararono un disegno contenente quattro rette di diversa lunghezza[30] già divise in due segmenti in modo da formare i rapporti di 0.5, Φ, 0.67 e 0.75. A 32 soggetti fu chiesto di copiarli nel miglior modo possibile. Durante questa operazione furono commessi ovviamente degli errori. Pare che la stragrande maggioranza di questi sia stata riscontrata solo nella copiatura dei rapporti di 0.67 e 0.75.

Con due esperimenti del 1984 Boselie ha cercato di dimostrare la sua teoria per cui particolari proporzioni come $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e Φ hanno una valenza estetica solo se affiancate o contenute da figure composte da rapporti semplici e regolari come 1:1 o 2:1. Nel primo test [9] si è servito di 12 coppie di poligoni irregolari, 7 costruite mantenendo costanti gli angoli a discapito dei lati, e 5 ottenute mantenendo costanti le lunghezze dei lati ma casuali gli angoli. Ogni coppia era composta da una figura che comprendeva sia le proporzioni complesse che quelle semplici, e da un'altra costruita solo con le proporzioni complesse. Furono chiamati a dare il loro giudizio 50 soggetti. In totale, su 12 coppie 11 videro prevalere la figura che conteneva entrambi i tipi di proporzioni. Questo sembrerebbe confermare l'ipotesi iniziale, tuttavia occorre tener presente che il distacco fu molto debole.

Continuando su questa linea [8] egli fece un altro esperimento utilizzando 10 coppie di poligoni irregolari contenenti alcune linee, in cui un elemento conteneva la sezione aurea (tra lati o angoli) mentre l'altro non rappresentava nessun tipo di rapporto. L'idea di base era che le figure contenenti Φ non comprendendo immagini con proporzioni semplici non avrebbero prevalso sui poligoni privi di qualsiasi proporzioni. Effettivamente, dopo aver sottoposto il quesito a 50 soggetti, su 10 coppie solo in una prevalse il disegno contente Φ. Tuttavia anche stavolta la differenza era davvero minima.

Nakajima e Ohta nel 1989 hanno anche provato ad usare un nuovo tipo di figure per i test di questo tipo, formate da due cerchi concentrici in cui il rapporto tra i diametri varia da 0.16 a 0.86. Con 9 oggetti di questo tipo sono state ottenute 36 coppie combinate, testate da 124 soggetti. Ampia omogeneità dei risultati, tra le molte proporzioni più votate compare anche Φ, ma niente di particolare.

Davis e Jahnke hanno tentato un'indagine più ampia, comprendente quadrati, rettangoli, trapezi, ellissi, cerchi e parallelogrammi in genere. Le figure sono state divise in modo che le due aree risultanti fossero tra di loro in qualche proporzione significativa. Nel primo esperimento, a 49 soggetti vennero presentate sei figure uguali (ad esempio tutti rettangoli) divisi in vario modo: furono fortemente preferite le ripartizioni in parti uguali. In un successivo test, fu chiesto di disegnare una figura preferita per poi dividerla nel modo

[30] 6,7,8,9,10 cm

più armonioso. Anche in questo caso la divisione in parti uguali ebbe fortemente la meglio. Nel terzo esperimento furono mostrate ben 114 coppie di figure, composte da un rettangolo ed un quadrato, ripartiti secondo varie proporzioni. Sempre vincitrice la ripartizione equa.

2.3.1 Le ricerche contemporanee

Gli studi più recenti non si limitano a mettere in discussione la validità della sezione aurea, ma in molti casi ne negano fermamente l'esistenza.

Frans Boselie, diversi anni dopo il primo esperimento, diverrà uno dei maggiori oppositori alle valenze estetiche della sezione aurea. Nel 1992, all'interno di un saggio intitolato senza mezzi termini *The golden section has no special aesthetic atractivity* [10] egli descrive un suo significativo esperimento in cui dimostra che la proporzione di 2/3 risulta gradevole tanto quanto quella aurea. Vennero preparati 16 rettangoli, 8 proporzionati in base a Φ e 8 in base a 1.5. All'interno dei primi vennero posizionate delle linee che dividevano ciascun lato secondo Φ, mentre nei restanti 8 le linee interne dividevano i lati secondo 3/2. Queste figure furono posizionate tutte insieme davanti ad ogni soggetto[31] che doveva riordinarle secondo i suoi gusti. La scelta media della serie aurea fu 8.7, mentre quella della proporzione pari a 3/2 fu di 8.3. Boselie proseguì con un altro esperimento. Stavolta fece uso di sei paia di rettangoli, tre disegnate in modo da tenere costante l'altezza delle figure e tre fatte in modo da conservare l'area. Ogni coppia era formata da un rettangolo aureo e da uno in rapporto di 3/2, presentati entrambi in orizzontale. Grazie a 30 soggetti furono effettuate 180 scelte, di cui 106 preferirono 3/2 a Φ, che fu selezionata solo per 74 volte. Non fu riscontrata nessuna particolare differenza tra le figure con altezza costante e quelle con area costante. A pag. 16 Boselie afferma con sicurezza che questi risultati

> allow only one conclusion: the golden section has no special perceptual aesthetic attractivity.

Le evidenze sperimentali a sfavore della sezione aurea aumentano, e sempre Boselie, proseguendo con le sue ricerche,qualche tempo dopo ottiene gli stessi risultati anche rispetto al confronto con la meno raffinata proporzione di $1 : 1.8$ [11].

La ripetizione degli esperimenti di fine ottocento dimostra che i risultati ottenuti nel 1876 erano tutt'altro che validi, tuttavia nessuno può dire con certezza se e dove Fecher abbia sbagliato. Ad esempio, nel 1995, Holger Höge scrive

[31] Parteciparono 25 soggetti

> One of our experiments followed Fechner's method of production, i.e., subjects had to draw rectangles, and the other one was done using the method of choice, i.e., subjects had to sort rectangles. The results show that different criteria lead to different proportions in the material produced and sorted, respectively. Thus, preference judgements seem to be the outcome of a process of information processing by using both sources of information: the physical arrangement of the stimuli and the cognitively represented concept of the subject. However, under both conditions no preference for the golden section was found [30].

Gli sforzi per dimostrare la superiorità della sezione aurea tuttavia non mancano anche in epoca moderna, ma conducono sempre a risultati negativi. Ad esempio i ricercatori W. D. K. Macrosson e G. C. Strachan hanno svolto le loro prove solo su soggetti "allenati" in un certo senso al buon gusto e all'estetica[32], riproponendo il classico quesito di dividere una linea in due parti.

Nonostante si aspettassero una forte presenza della sezione aurea, essi dovettero constatare che in realtà i rapporti veramente presenti erano quello di 1 : 1 e quello di 1 : 2 [51].

Anche quando sono stati effettuati esperimenti senza nessun preconcetto, è capitato comunque di aver ottenuto una negazione della sezione aurea, come nel caso delle esperienze di George K. Shortess, J. Craig Clarke e Kathleen Shannon, che hanno calcolato, ispirandosi sempre a Fechner, le proporzioni tra i lati dei dipinti, sia nelle opere di alto livello, che in quelle popolari[33]. Hanno constatato una uniformità quasi impressionante nella risposta,poichè la maggior parte dei quadri risulta avere una proporzione tra i lati pari ad 1.3. Dopo aver fatto qualche riferimento al rapporto pitagorico di 4 : 3, i ricercatori hanno sottolineato di non aver avuto alcun riscontro con la presenza della sezione aurea, tanto da dare al loro articolo il significativo titolo di "The shape of things: But not the Golden Section".

Per quanto possa sembrare strano, le ricerche sulla sezione aurea sono ancora piuttosto numerose, tanto da sovrapporsi spesso nello stesso lasso di tempo (numerosi articoli che ho citato appartengono tutti al medesimo anno, il 1997). Inoltre concordano quasi tutte nella finalità: ripetere alla luce dei metodi moderni i tanto discussi esperimenti, al fine di risolvere una volta per tutte ogni dubbio su questa materia.

Ad esempio, Vladimir J. Koneni utilizza sia i metodi tradizionali [34] che

[32] Architetti, studenti d'arte, etc...

[33] Ratios were calculated for paintings that are both high art and popular art

[34] Bisezione delle linee, produzione di rettangoli etc...

quelli moderni [35] per fare una catena di esperimenti *definitivi*, diversi tra loro, che contemplino tutte prove principali fatte fino ad ora.

Risultato: non c'è assolutamente alcuna rilevanza significativa per quanto riguarda la sezione aurea.

Al contrario i soggetti sembrano motivati più dall'area racchiusa all'interno del profilo o *peso* che dalle effettive proporzioni tra le loro parti[36]. Questa considerazione mette in discussione la validità stessa sull'utilizzo delle geometrie pure – rettangoli, quadrati, linee etc... – per le indagini estetiche, in quanto mostra che l'applicazione delle proporzioni su manufatti reali, ad esempio vasellame, modifica grandemente l'effetto delle proporzioni stesse.

Una ulteriore conferma della totale assenza di validità estetica della sezione aurea viene anche dagli esperimenti del già citato George Markowsky (cfr. pag. 13), che dopo aver sottolineato che i risultati di Fechner erano ottenuti con una prova basata su un numero di rettangoli troppo basso, ha ripetuto l'esperimento, utilizzando due tavole principali composte da 48 rettangoli la cui altezza rimaneva costante, mentre il rapporto con la larghezza variava da 0.4 a 2.5. Quindi erano presenti Φ, $1/\Phi$, $9/4$, e $4/9$, per conprendere anche le dimensioni relative 'misurate' nel Partenone.

In una tavola le figure erano disposte in maniera casuale, mentre nell'altra erano ordinate in base alle proporzioni. I soggetti hanno scelto il rettangolo 'migliore' sia in una che nell'altra, variando solitamente di poco le proporzioni. Tuttavia il rettangolo più scelto è quello di 1,83.

Per finire Holger Höge, dopo una serie di tre esperimenti, saluta definitivamente la sezione aurea nel suo articolo del 1997 intitolato *The Golden Section hypothesis - Its last funeral.* Il titolo mi risparmia ogni commento [31].

3 Il fallimento del *modulor*

A questo punto è impossibile non accennare almeno sommariamente al celebre *modulor* di Le Corbusier, che contiene sia la sezione aurea che la serie di Fibonacci. Questo complesso sistema proporzionale venne ideato dall'architetto francese con lo scopo di *standardizzare* la produzione architettonica, senza tuttavia abbandonare l'affascinante presenza di Φ.

Ma cosa significa standardizzare? Secondo Arnheim, "la standardizzazione vuole che il numero delle unità impiegate sia il più piccolo possibile e

[35] Ad esempio utilizzando i contorni o meglio la silouette di vasellame costruito utilizzando la sezione aurea, per osservare il modo in cui i soggetti dispongono questi manufatti su di una mensola.

[36] Ovviamente questo scaturisce dalle prove effettuate con i vasi

che le unità stesse si combinino facilmente tra loro." Un esempio comune e molto efficace di standardizzazione è il sistema dei fogli da disegno secondo le norme UNI: duplicando un formato A5 si ottiene l'A4, che duplicato a sua volta fornisce l'A3, che duplicato ancora forma l'A2, e così via, sino ad ottenere l'A0. Allo stesso tempo ogni foglio è in rapporto semplice con tutti gli altri; così un A3 equivale a 4 A5, l'A2 a 8 A5 o a 4 A4, etc…

Il sistema di Le Courbusier è enormemente più complesso, ma riesce a fare la stessa cosa?

Il modulor fu calcolato partendo dal corpo umano, poiché la maggior parte dei manufatti sono "o contenitori dell'uomo o estensioni dell'uomo" ([15], pag.60). A differenza dei disegni di Vitruvio e Leonardo, l'uomo di Le Curbosier sta in piedi, con un braccio alzato. Vengono considerate due misure principali:

- L'altezza dalla testa ai piedi, di circa[37] 183 cm,
- l'altezza dalla punta della mano alzata ai piedi di 226 cm.

La divisione di queste due distanze in base a Φ genera due coppie di valori, ossia 113-70 e 140-86. Ognuna di queste a sua volta genera grazie all'algoritmo di Fibonacci (vedi l'appendice B.2) due serie di valori, dette rispettivamente serie rossa e serie blu. Ad esempio, la coppia 140-86 genera con facilità …, 33, 53, **86**,**140**, 226, 366,…, infinita nei due sensi. Tra i rispettivi termini delle due serie, è costante il rapporto di 1/2.

Nonostante questa spiegazione sia molto, molto semplificata, essa risulta già estremamente cervellotica. Ma almeno funziona? Riusciamo ad ottenere la stessa efficace standardizzazione del nostro esempio con i fogli UNI? Certamente no. E non è neppure difficile dimostrarlo. I formati A1, A2, A3, etc…, sono tutti tra loro in rapporti semplici ed intuitivi, anche se si trovano, all'interno della serie, molto distanti. In questo senso, se volessi, ad esempio, inserire in una griglia di A5 dei fogli A1, potrei farlo senza difficoltà, rispettando sempre i vertici della griglia.

Questo non accade con il moduli di Le Curbosier. A parte i valori adiacenti di una stessa serie, che sono in rapporto di Φ, e la cui somma fornisce il valore del termine successivo, tutti gli altri, appena più lontani sono tra loro in proporzioni complicate, e tutt'altro che standardizzate.

Riprendiamo il breve tratto della serie blu: …, 33, 53, **86**,**140**, 226, 366,…, e consideriamo i due valori, tra loro molto vicini di 33 e 140. Il primo modulo è contenuto nel secondo 4.2424242424242424…, volte: questo significa che in una griglia formata da elementi con lato di 33 cm non

[37]Il modulor venne basato sul sistema anglosassone, per cui l'altezza era di 6 piedi, pari a 182,88 cm.

si possono inserire, a meno di sovrapposizioni, forzature o tagli, elementi caratterizzati da 140 cm di lato.

Il vantaggio della standardizzazione, cioè "uno scatenamento meraviglioso dei metodi di produzione a buon mercato"([15], pag.107) non è possibile: una griglia fabbricata in Italia in base al modulo 33 e dei pannelli fabbricati in Giappone con il modulo 140 non potrebbero essere mai assemblati in America, poichè, alla faccia della standardizzazione, non sono assolutamente compatibili.

E questo senza scomodare minimamente i rapporti tra due termini appartenenti a serie diverse. Basta considerare anche solo i capostipiti[38]della rossa e della blu: 183 è contenuto nel 226 esattamente 1.234972678 volte. Almeno i valori di prima erano periodici!

[38]La cosa non cambia considerando i valori senza approssimazione, direttamente nelle unità anglosassoni.

Conclusioni

Anticamente la "sezione aurea" non si chiamava così, ma semplicemente *sezione* o *divisione in media ed estrema ragione*. Essa era, al pari di molte altre costruzioni geometriche, una delle regole (forse molto più teorica che pratica) che appartenevano al bagaglio culturale di un architetto classico. Sicuramente fu utilizzata in qualche edificio antico, ma sempre con minore importanza rispetto alla simmetria, alla proporzione di 1:2 e 3:2...

Il rinascimento, con Pacioli e gli altri, riprende e distorce il concetto originale, rivestendolo di una strana aura mistica. Architetti dell'epoca, con strumenti alquanto rudimentali ottengono le misure di edifici semisepolti, e ricostruendo spesso a fantasia le parti mancanti, ritrovano questa o quella proporzione, e vi scrivono sopra dei trattati. Tuttavia già nel '700 ci si rese conto che la s.a. appartiene alla sfera delle superstizioni, e per due secoli il suo uso venne evitato.

Per i greci tale proporzione non era considerata superiore agli altri rapporti, né tantomeno "aurea". Questo aggettivo, come tutte le altre favole esoteriche, ci giunge semplicemente dal secolo scorso. Strane figure di tuttologi, con fare pseudo scientifico, prendendo le misure su fotografie dell'epoca, scattate senza il minimo criterio fotogrammetrico, trovano la s.a. in tutti gli edifici del mondo...

Recenti critiche li definiscono Phi-edeli, per i quali ogni punto è buono per appoggiare il metro e trovare proporzioni. In realtà, statisticamente, anche uno scarabocchio contiene tutte le proporzioni che vogliamo: basta saperle trovare.

Sempre nell'ottocento vengono fuori nuove storielle, come quella delle piramidi che contengono la s.a.,risalente al 1859 e dovuta al piramidologista John Taylor, che mi sono permesso di smentire riportando seri ed attendibili studi.

Tuttavia la conferma dell'assoluta inesistenza di una qualsiasi valenza estetica della s.a. è fornita dal metodo sperimentale. I primi test eseguiti nel 1876 da Fechner sono di dubbia fede, fatti con lo scopo di dimostrare la bellezza di Φ, ma via via che la psicometria si affina, i risultati dimostrano che nessuno è in grado di distinguere un rettangolo aureo dagli altri, né tantomeno è spinto a disegnarlo. Ho riportato tutto l'iter di queste ricerche, fino a giungere alle conclusioni dei ricercatori contemporanei, per i quali, dal punto di vista della preferenza estetica, la s.a, semplicemente NON ESISTE.

Sono notevoli invece le sue proprietà matematiche e geometriche, che per completezza, ho riportato in appendice.

Appendici

A La geometria di Φ

Riporto sommariamente alcune costruzioni geometriche che dimostrano come sia facile utilizzare elementi della matematica superiore in maniera involontaria, senza nessun bisogno di conoscerne le nozioni. La costruzione di un decagono, un pentagono o di una stella a cinque punte portano all'utilizzo della famosa sezione aurea, mentre una semplice decorazione ripetitiva può costruire una spirale logaritmica, e la costruzione di un ottagono crea un sistema modulare basato su $\sqrt{2}$...

A.1 Il metodo di Euclide

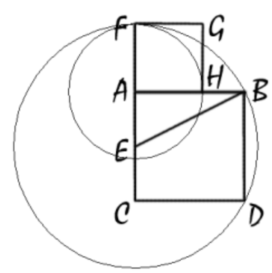

Figura 6: La costruzione dagli Elementi di Euclide.

Dato il segmento $\overline{AB}$ da dividere in media ed estrema ragione, dapprima lo si usa come lato di un quadrato $ABCD$. Trovata poi la meta del lato $\overline{AC}$, ossia E, si fa partire da qui una linea che incontra B. Questa retta $\overline{AC}$ non è altro che il raggio di un cerchio con centro in E stesso, che si incontra con il prolungamento di $\overline{AC}$ in F. Il segmento $\overline{AF}$ viene preso come misura per la costruzione del piccolo quadrato $AFGH$. Il punto H divide il segmento dato $\overline{AB}$ in media ed estrema ragione.

A.2 Un metodo più veloce

Dato il segmento $\overline{AB}$ da dividere in media ed estrema ragione, dapprima lo si divide in due parti, individuando il punto C, dopodichè si costruisce il rettangolo di larghezza $\overline{AB}$ e di altezza $\overline{BD}$ pari ad $\overline{AC}$. Si congiungono i due punti A e D, ottenendo la diagonale $\overline{AD}$. Su questa diagonale si riporta l'altezza $\overline{BD}$, ottenendo il punto E. Puntando con il compasso in A

si riporta la distanza $\overline{AE}$ sul segmento iniziale $\overline{AB}$, individuando il punto F. Quest'ultimo divide il segmento dato in media ed estrema regione.

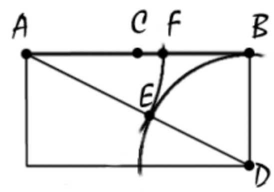

Figura 7: Una costruzione più rapida.

A.3 La costruzione della spirale logaritmica.

Per prima cosa si sceglie il raggio r del cerchio più piccolo dal quale avrà inizio la rosetta. Si suddivide poi questo cerchio in un certo numero n di parti uguali, di larghezza pari a w. Si sceglie poi a piacere l'altezza h con cui realizzare la prima fila di triangoli. Unendo a due a due i vertici superiori di questi ultimi si otterrà una serie di segmenti. Questi saranno la base per una nuova fila di triangoli. Utilizzando lo stesso rapporto w/h si determina la nuova altezza. Utilizzando i vertici di questa seconda fila di triangoli si crea la base per una terza serie ancora più esterna...

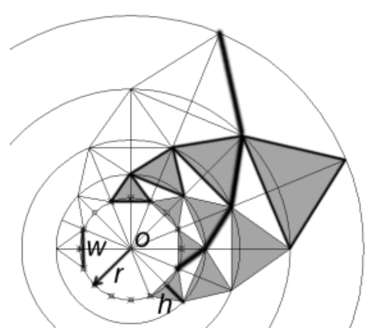

Figura 8: Costruzione della spirale logaritmica.

A.4 Ancora una costruzione di Φ

Sia dato il lato $\overline{AB}$ e si voglia costruire un segmento più grande che sia con esso in sezione aurea. Per prima cosa si raddoppia la sua lunghezza per ottenere il segmento $\overline{AC}$. Quest'ultimo verrà preso come base di un quadrato

$\overline{ACDE}$. Dall'estremo B del segmento assegnato si condurrà quindi la retta $\overline{BD}$. Questa possiede già la lunghezza cercata. Con un colpo di compasso si può riportare di seguito ad $\overline{AB}$ sotto forma del segmento $\overline{BF}$

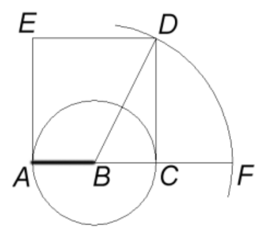

Figura 9: Ancora una costruzione di Φ.

A.5 La Vesica Pisces

La *vesica pisces* è una figura estremamente semplice da realizzare, legata strettamente al disegno di un triangolo equilatero, tuttavia nella sua costruzione si ritrova implicitamente la radice di tre. Ovviamente i suoi primi utilizzatori non avevano il concetto di numero irrazionale, ma, analogamente a quanto è accaduto per π, essi hanno utilizzato la matematica superiore senza saperlo. Partendo dal segmento $\overline{AB}$ con raggio a questo uguale si trac-

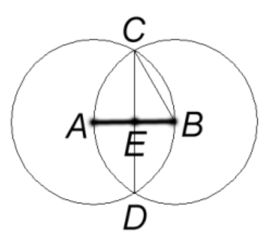

Figura 10: La diffusissima Vesica Pisces.

ciano i due cerchi alle estremità. Il segmento $\overline{CD}$ ottenuto congiungendo i punti di intersezione di tali cerchi si trova in rapporto di $\sqrt{3}$ con $\overline{AB}$. Infatti per Pitagora sappiamo che $\overline{CB}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{EC}^2$, mentre per costruzione è anche $\overline{CB} = 2 \cdot \overline{EB}$. Sostituendo e ricavando $\overline{EC}$ avremo che $\overline{EC} = \sqrt{3} \cdot \overline{EB}$ e quindi anche $\overline{CD} = \sqrt{3} \cdot \overline{AB}$.

A.6 Il sacro taglio

Gli antichi romani utilizzarono molto spesso questa costruzione, poichè permetteva di ottenere con facilità ripartizioni equilibrate cruciformi ed ottagonali, servendosi poche operazioni adattissime al tracciamento sul terreno. L'ingegnere danese Tons Brunes lo ha chiamato *sacro taglio*[39] perchè utilizza i componenti vitruviani (cerchio e quadrato). Nella figura possiamo osservare

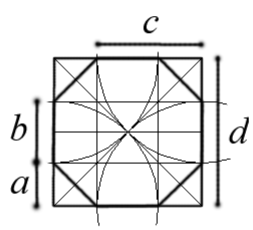

Figura 11: Il sacro taglio

come con tale semplice metodo si ottenga implicitamente un sistema basato su $\sqrt{2}$. Infatti, partendo da a come misura base, avremo che $b = a\sqrt{2}$; $c = a\sqrt{2} + a$; $d = a\sqrt{2} + 2a$;

A.7 I triangoli aurei

Osservando il famoso pentagono in figura 1 possiamo osservare la presenza ripetuta a diverse scale di due classi di triangoli isoscele: quelli del tipo $\widehat{DAC}$ e quelli $\widehat{DEA}$, che ho rappresentato (in una delle loro molteplici combinazioni) nella figura 12. Per costruzione tali figure contengono la sezione aurea, per

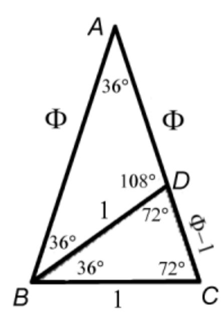

Figura 12: I due triangoli aurei.

cui è facile comprendere come qualsiasi geometria che le usi come moduli sia anch'essa basata su Φ. Si pensi ad esempio al decagono, ottenuto ruotando dieci volte il triangolo $\widehat{BAC}$ attorno al punto A. Questo torna a conferma dell'ipotesi per cui non è poi tanto difficile proporzionare involontariamente

[39] Ci risiamo con le sacralizzazioni in epoca moderna

in base alla *sezione*, anche se alcune composizioni basate su questi due triangoli sono effettivamente sorprendenti, come la tassellazione di Penrose, che vedremo parlando dei riscontri in natura.

A.8 Φ nei solidi 3D

Per continuare il discorso sulla presenza spontanea della sezione aurea, possiamo considerare anche i solidi platonici: Tetrahedron, Hexahedron[40], Octahedron, Dodecahedron, Icosahedron. In particolare prendiamo gli ultimi tre, caratterizzati dal possedere rispettivamente 8, 12 e 20 facce. Osservando

Figura 13: Icosahedron e Dodecahedron, con i rettangoli aurei. Octahedron contenente il Dodecahedron.

la figura 13 notiamo che congiungendo i centri (tra loro complanari) di ogni faccia dell'icosahedron, otteniamo tre rettangoli. Le stesse figure emergono congiungendo i vertici di un dodecahedron, e poichè un octahedron contiene il dodecahedron, anche al suo interno, implicitamente, sono contenute le stesse tre entità.

Si tratta di tre rettangoli aurei, i cui lati si trovano nel rapporto di 1:Φ.

[40] Cioè il cubo.

B La matematica di Φ

B.1 Il più irrazionale dei numeri: Φ

Tony Phillips, dell'AMS[41] nell'introdurci alla matematica della phillotaxis[42] ci avverte che nonostante si definiscano irrazionali tutti i numeri che non sono esprimibili da una frazione, ve ne sono alcuni più irrazionali di altri. Ad un primo approccio questo può sembrare strano, tuttavia i matematici moderni hanno effettivamente trovato un modo per misurare e classificare l'irrazionalità. Cosa c'entra questo con la sezione aurea? Beh, numerosi studi hanno dimostrato che nell'ottimizzare al massimo lo spazio a disposizione[43] la natura sceglie un incremento pari all'angolo più irrazionale possibile. Come vedremo, tale numero è, ancora una volta, Φ.

L'approssimazione razionale di un numero irrazionale L'*espansione decimale* è semplicemente una sequenza di numeri razionali che tendono al vero valore di un numero irrazionale. Facciamo un esempio con il famoso π:

$$\begin{aligned} r_0 &= 3 \\ r_1 &= 3.1 = 31/10 \\ r_2 &= 3.14 = 314/100 \\ r_3 &= 3.141 = 3141/1000 \\ &\dots \end{aligned}$$

Possiamo misurare il valore di questa approssimazione osservando che vale la formula

$$\pi - r_k < \frac{1}{10^k}$$

Ovviamente, questo procedimento è applicabile per tutti i numeri irrazionali. Tuttavia, accettando denominatori diversi dalle potenze di 10, il risultato migliora ancora. Così, già solo con denominatori minori di 10, abbiamo l'ottima approssimazione di 22/7, che riporta un errore 0.00126. Con denominatori minori di 200 possiamo costruire la frazione di 355/113 in cui l'approssimazione sbaglia di appena 0.000000266.

Analogamente possiamo ragionare anche per altri numeri irrazionali, ad esempio la celeberrima $\sqrt{2}$, per cui con denominatori inferiori a 10 la migliore

[41] American Mathematical Society: www.ams.org

[42] Studio dello sviluppo strutturale delle piante

[43] Si pensi ad una pigna, o alla disposizione dei semi di girasole, costipati secondo un andamento spiroidale...

approssimazione è di 7/5, il cui errore è di 0.142, mentre con denominatore inferiore a 200, la frazione più prossima è 239/169, con errore di 0.0000124.

Si nota come a parità di condizioni rispetto al denominatore, l'approssimazione di $\sqrt{2}$ è assai meno precisa di quella di π. I matematici possono dunque dire[44] che $\sqrt{2}$ è *più irrazionale* di π.

B.1.1 I numeri razionali e le frazioni continue

Un qualsiasi numero razionale P/Q può essere rappresentato ricorrendo alle frazioni continue, rispettando la forma:

$$\frac{P}{Q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots}}} \tag{9}$$

Questa modo di scrivere è alquanto ingombrante, per cui si preferisce ricorrere alla meno intuitiva, ma sicuramente più pulita forma di lista:

$$\frac{P}{Q} = [\ a_0; a_1; a_2; \ldots\ ]$$

Il procedimento per ottenere una frazione continua è piuttosto semplice, e basterà fare un esempio per capire il meccanismo ripetitivo che ne è alla base. Ripeteremo lo stesso procedimento sino a quando non ci ridurremo ad avere come resto un numeratore o un denominatore pari ad uno. Supponiamo di dover trattare il numero 7/30. Per prima cosa occorre avere il numeratore maggiore del denominatore, per cui scriveremo

$$\frac{7}{30} = \frac{1}{\frac{30}{7}}$$

Dopodichè osserveremo che

$$\frac{30}{7} = \frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{2}{7} = 4 + \frac{2}{7}$$

La frazione iniziale diventa dunque

$$\frac{7}{30} = \frac{1}{4 + \frac{2}{7}}$$

Poiché 2/7 non possiede nè un numeratore nè un denominatore pari ad uno, applichiamo su di esso ancora lo stesso procedimento. Visto che il numeratore è minore del denominatore dovremo ancora scrivere

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{\frac{7}{2}}$$

[44]Tralasciamo qui gli algoritmi da loro seguiti, che ovviamente non procedono per tentativi, come noi abbiamo invece fatto.

Poi osserviamo che

$$\frac{7}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

A questo punto, sostituendo questa somma di valori a posto di $7/2$, avremo

$$\frac{7}{30} = \frac{1}{4 + \frac{1}{3+\frac{1}{2}}}$$

Osserviamo che manca il termine a_0, per cui, utilizzando la lista scriveremo:

$$\frac{7}{30} = [\ 0; 4; 3; 2\ ]$$

Qual'è l'utilità delle frazioni continue ? Ma come abbiamo fatto a finire dalla sezione aurea alle frazioni continue? In realtà vogliamo dimostrare una proprietà veramente singolare di Φ, che poi si tradurrà facilmente in disegni e schemi geometrici comprensibili a tutti: Φ è il numero più irrazionale, e per questo viene usato molto spesso dalla natura. Purtroppo occorre un minimo di introduzione matematica per capire bene questo concetto.

Abbiamo rapidamente visto come utilizzare le frazioni continue per rappresentare i numeri razionali, anche se probabilmente non ne abbiamo capito l'utilità. Questa diverrà lampante vedendo come si rappresentano i numeri irrazionali. Prendiamo ad esempio, ancora una volta, la $\sqrt{2}$. In questo caso è già difficile partire, poichè è impossibile scrivere questo numero sotto forma di frazione. Per fortuna ci viene in aiuto l'algebra con le sue belle incognite: sapendo che $\sqrt{2}$ è più grande di 1 ma è più piccola di 2, possiamo scrivere

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x} \tag{10}$$

Mhh... il problema adesso è trovare x, per cui forse è meglio scrivere

$$x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

Razionalizzando avremo:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2} + 1$$

Ma abbiamo appena detto che $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$ per cui sostituendo

$$x = \sqrt{2} + 1 = 1 + \frac{1}{x} + 1 = 2 + \frac{1}{x}$$

dunque siamo giunti a dare a x un valore che contiene sè stesso, ossia

$$x = 2 + \frac{1}{x}$$

Se torniamo alla sostituiamo ricorsivamente alla 10 tale valore, otteniamo una frazione continua:

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\cdots}}}$$

Quindi la radice di due si sprime anche come:

$$\sqrt{2} = (1; 2; 2; 2; 2; \ldots)$$

e questo ci permette di calcolarne il valore con approssimazioni bassisime, scegliendo opportunatamente a che punto della frazione continua interromperci. Una proprietà notevole di questo genere di scomposizioni è quella per cui la sequenza dei coefficienti, per quel che riguarda le radici quadrate, è sempre ciclica, ad esempio:

$$\sqrt{2} = (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots)$$

$$\sqrt{3} = (1, \overbrace{1, 2}, \overbrace{1, 2}, \overbrace{1, 2} \ldots)$$

$$\sqrt{4} = (2)$$

$$\sqrt{5} = (2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \ldots)$$

$$\sqrt{6} = (2, \overbrace{2, 4}, \overbrace{2, 4}, \overbrace{2, 4} \ldots)$$

$$\sqrt{7} = (2, \overbrace{1, 1, 4}, \overbrace{1, 1, 4}, \overbrace{1, 1, 4} \ldots)$$

$$\sqrt{8} = (2, \overbrace{1, 4}, \overbrace{1, 4}, \overbrace{1, 4} \ldots)$$

$$\sqrt{9} = (3)$$

$$\ldots$$

Sezionando in questo modo i numeri irrazionali, ci stiamo avvicinando alla comprensione del motivo per cui Φ è il numero più irrazionale di tutti e quindi del perché la natura spesso lo usi...

B.1.2 Il legame tra Sezione Aurea e frazioni continue

É molto interessante che le frazioni continue rappresentino un modo alternativo per la risoluzione delle equazioni di secondo grado. Facciamo rapidamente un esempio, con una equazione tipo, come $x^2 - 5x - 1 = 0$. Questa si può scrivere come

$$x^2 = 5x + 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{5x+1}{x} \quad \rightarrow \quad x = 5 + \frac{1}{x}$$

Sostituendo la x a se stessa, avremo nuovamente una frazione continua, che approssimerà il risultato bene quanto vogliamo:

$$x = 5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{5+\frac{1}{x}}}$$

A questo punto siamo pronti per avvicinarci a Φ, poichè basta semplicemente ricordarsi che esso viene generato dall'equazione

$$x^2 = x + 1$$

Dividendo entrambi i membri per x[45] otteniamo

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

ed usando questo valore ricursivamente avremo la frazione continua

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$$

Come si vede, si tratta della più semplice frazione continua, essendo formata da sole unità:

$$\Phi = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots)$$

Troncando la frazione continua a diversi livelli di approssimazione, otteniamo questo genere di sequenza:

$$\frac{1}{1}; \quad \frac{2}{1}; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{5}{3}; \quad \frac{8}{5}; \quad \frac{13}{8} \ldots$$

Dove è facile osservare la presenza della serie di Fibonacci 1,1,2,3,5,8,13...

[45] Ipotizzando $x \neq 0$

B.1.3 Ecco perchè Φ è il più irrazionale!

Abbiamo detto che la frazione continua di Φ, essendo formata da sole unità, risulta essere la frazione continua più semplice. Ma cosa significa esattamente in termini di calcolo?

Consideriamo una frazione continua generica, che si fermi solo al secondo coefficiente, cioè a_1.

$$N = a_0 + \frac{1}{a_1} \tag{11}$$

Ovviamente, a_0 è un numero intero, mentre il grado di approssimazione è fornito dal rimanente $1/a_1$. É intuitivo che più è grande a_1, più l'approssimazione è precisa. Per $a_1 = 10$ essa è dell'ordine del decimo[46], per $a_2 = 100$ è dell'ordine del centesimo e cosi via...

Poichè a_1 deve assumere un valore intero, qual'è il numero più piccolo che possiamo porvi ? Ma è 1, certamente. Con $a_1 = 1$ avremo sicuramente l'ordine di approssimazione più grossolano. Va da sé che il numero con l'approssimazione più imprecisa, cioè quello più lungo da approssimare, è quello la cui frazione continua è composta solo, unicamente e per sempre da 1. Come abbiamo visto, questo numero è Φ, che per tale ragione viene chiamato *il numero più irrazionale*, o anche *l'ultimo numero irrazionale*. Vedremo tra breve come la natura stessa ne faccia un ampio uso, sebbene non esclusivo.

B.2 Φ e la serie di Fibonacci

La sezione aurea e la serie di Fibonacci sono intimamente legate, poiché la frazione continua di Φ conduce la sequenza di Fibonacci e questa, a sua volta, continuata all'infinito genera Φ tramite semplici rapporti (pag. 53). In realtà questa strettissima parentela si instaura tra ogni numero irrazionale e la frazione continua da lui derivata, ma nel caso di Φ la serie ottenuta possiede veramente caratteristiche molto particolari.

Tanto per iniziare, la sua scoperta non ha alcun legame con la sezione aurea. Leonardo Pisano, detto Fibonacci (filius Bonacci), fu uno dei maggiori matematici della storia, ed in pieno medioevo si occupò di una grande quantità di problemi aritmetici. Nella sua opera più famosa, il Liber Abbaci, preparata già nel 1202, ma riveduta nel 1228, egli per qualche strano motivo si pose un singolare problema: Se una coppia di conigli rimane isolata,

> quanti conigli nasceranno nel corso di un anno, ammesso che ogni mese una coppia di conigli produca un'altra coppia, e che i conigli incomincino a partorire due mesi dopo la propria nascita?.

[46] Poichè sappiamo che la frazione converge sicuramente al nostro numero irrazionale.

Fibonacci ipotizza che i conigli non muoiano mai, quindi, durante il primo mese avremo una sola coppia, e altrettanto durante il secondo. Dopodichè la prima coppia diverrà fertile, e nel terzo mese avremo due coppie. Nel quarto mese la coppia più anziana, già fertile, produrra ancora una coppia, mentre quella nata nel terzo mese non sarà ancora fertile. Tuttavia, giunti al quinto mese anche questa produrra la sua prima coppia, che andrà a sommarsi a quelle prodotte dai primi conigli...

Beh, detto così sembra molto complesso, ma osservando la figura ci si rende conto che si tratta di un algoritmo banale, soprattutto se consideriamo in maniera astratta la sequenza di numeri originata da questo processo. Partendo infatti dalla coppia (1,1), osserviamo che ogni numero non è altro

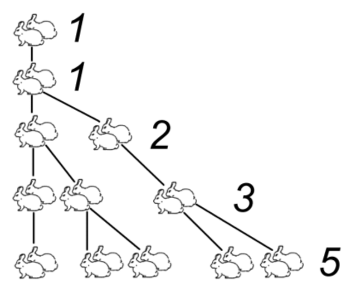

Figura 14: La serie di Fibonacci

che la somma dei due che lo precedono: 1,1,2,3,5,8,13,21,34...

Questa serie numerica è la celebre serie di Fibonacci. Ma cosa ha di tanto speciale?

In questa breve sezione vedremo solamente le principali proprietà matematiche, tuttavia nella terza appendice avremo modo di osservare come tale sequenza si ritrovi frequentemente in natura. Comunque voglio sin da adesso ribadire che nonostante la sua ripetuta frequenza essa non è che una delle tante regole non assolute che si ritrovano nei processi naturali, peraltro evidente solo in condizioni prive di fattori di disturbo.

B.2.1 La spirale logaritmica: un antico frattale

Le spirali più importanti sono di due tipi: quella archimedea e quella logaritmica. La spirale di Archimede è la più semplice ed è espressa in coordinate polari con la formula $r = k\alpha$. Si vede chiaramente come la lunghezza del raggio r sia proporzionale all'angolo α in base ad una costante k, per cui la distanza tra le linee di questa figura è sempre uguale. Tutte le spirali di Archimede quindi sono simili, e differiscono solo per scala. Questo primo tipo di figura non ha nulla a che vedere con la sezione aurea, tuttavia vogliamo far notare che anch'essa è spesso presente in natura, ad esempio nelle tele dei ragni. Questo per ribadire (se ce ne fosse bisogno!) che Φ non è assolutamente l'unica legge matematica presente nelle forme naturali. Certamente però noi vogliamo occuparci proprio di quei casi in cui ritroviamo la famosa proporzione, per cui dovremo passare a descrivere l'altra importante entità geometrica che invece con la sezione aurea ha molto a che fare: la spirale logaritmica.

Una prima fondamentale differenza sta nel fatto che quest'ultima è provvista di un punto iniziale, mentre la logaritmica non ha inizio nè fine. Immaginiamo di avere un foglio infinito, sul quale poter disegnare *tutta* la figura: *zoomando* verso il suo centro, ci accorgeremmo che essa si ripete in scala ridotta, ma in maniera sempre uguale. Potremmo ingrandire il suo interno miliardi di volte, ritrovando sempre infinite piccolissime spirali *autosimili.* Allo stesso modo, allontanandoci da essa, sgomenti ci accorgeremmo che le sue dimensioni sono enormi, maggiori di quelle di una galassia... infinite.

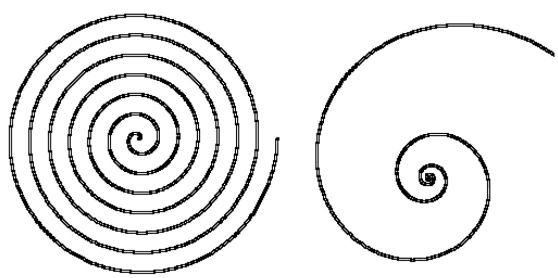

Figura 15: La spirale di Archimede e la spirale logaritmica.

Questa strana caratteristica dovette impressionare parecchio il celebre scienziato JacKob Bernoulli , che ne rimase talmente ossessionato da volerne una scolpita sulla sua lapide[47], insieme con il motto EADEM MUTATA RESURGO. Tuttavia oggi siamo abituati a questo fenomeno grazie alla matematica frattale, che spesso si è divertita a con cose del genere, ad esempio con il profilo di una costa marina, in cui ogni piccolo particolare è uguale alla costa stessa. Sotto questo punto di vista anche la spirale appartiene a questa particolarissima geometria. Essa si ottiene con l'equazione $r = b^{k\alpha}$, dove b e k sono entrambi delle costanti. Ovviamente, variando questi due parametri possiamo ottenere infiniti tipi di spirali logaritmiche.

Un altro comportamento fondamentale della s.l. è quello per cui la distanza tra le linee aumenta sempre più, per cui la sua traiettoria si adatta

[47]Per ironia del destino lo scalpellino non fu capace di disegnare una spirale logaritmica, così ne fece una archimedea...

spesso a taluni problemi pratici che si trovano in natura. Questo spiegherebbe perchè essa compare spontaneamente con una frequenza molto superiore a quella archimedea.

B.2.2 La spirale di Fibonacci

La misurazione pratica delle spirali logaritmiche presenti in natura[48] ha dimostrato la stragrande prevalenza di una particolare classe tra queste: quella denominata come spirale di Fibonacci.

In questo caso dov'è il collegamento con la famosa Serie ? Nel singolare modo in cui essa viene generata. Basta partire con un quadrato di dimensioni qualsiasi, di lato n. Su un suo lato a piacere costruiamo un altro quadrato ed otterremo un rettangolo di lati $2n$ x n. Sul lato più lungo di questo rettangolo costruiamo un altro quadrato, che quindi avrà il lato pari a $2n$. Ora in totale abbiamo un rettangolo di lati $3n$ x $2n$. Continuiamo questo processo, costruendo sempre un quadrato sul lato più lungo del rettangolo. Dando uno sguardo alla figura ci accorgiamo del fatto che si tratta ancora una volta di una costruzione elementare. Con un minimo di attenzione,

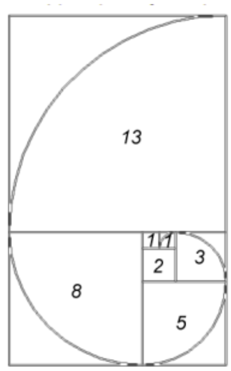

Figura 16: Costruzione della spirale di Fibonacci.

notiamo anche che i quadrati utilizzati nella successione hanno la lunghezza del lato rispettivamente di $1n, 1n, 2n, 3n, 5n, 8n, 13n \ldots$ ed ecco qui la serie di Fibonacci. Per costruire la spirale a questo punto è sufficiente un compasso, che puntato sull'angolo di ogni quadrato tracci un arco congiungente due angoli opposti diagonalmente.

[48]Effettuate sempre con l'ausilio della statistica, e quindi determinate con svariati sistemi di approssimazione.

B.2.3 Dov'è la sezione aurea

Beh, il fatto che la spirale logaritmica sia costruita in base alla successione di Fibonacci suggerisce un legame molto indiretto con la sezione aurea, limitato solo alla matematica e non alla forma percepibile. Eppure Φ si trova anche sotto questo secondo punto di vista. Nella figura 17 sono stati rappresentati i raggi della spirale ogni 1/4 di giro chiamandoli rispettivamente r_1, r_2, r_3, r_4. Occorre considerare anche i diametri formati dalla loro somma a due a due, cioè $d_1 = r_1 + r_3, \quad d_2 = r_2 + r_4$.

Questi raggi, a loro volta delimitano tre archi di cerchio, ossia $\widehat{WX}, \widehat{XY}, \widehat{YZ}$. Ovviamente quanto sta per essere detto si estende a tutti gli infiniti raggi e archi della spirale. A questo punto è inutile utilizzare altre parole: sarà

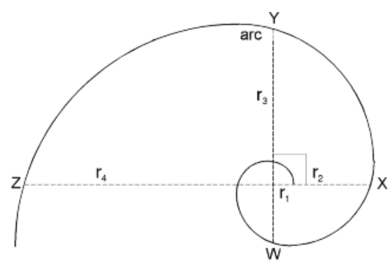

Figura 17: La presenza di Φ nella spirale logaritmica.

sufficiente leggere le formule nell'equazione 12.

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_4}{r_3} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{\widehat{XY}}{\widehat{WX}} = \frac{\widehat{YZ}}{\widehat{XY}} = \frac{\widehat{XZ}}{\widehat{WY}} = \frac{\widehat{WY}}{d_1} = \frac{\widehat{XZ}}{d_2} = \Phi \tag{12}$$

B.3 Una formula che contiene sia Φ che π

La riporto per dovere di cronaca, ma io stesso non l'ho verificata.

$$4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}((\phi - a)^{2k+1} + (2\phi - 3)^{2k+1}) \tag{13}$$

C La presenza di Φ nella natura

Benchè la sezione aurea sia presente in natura, essa non è quel principio universale che molti credono. Innanzitutto Φ si manifesta non tanto sotto forma di proporzione tra le parti, quanto come spirale logaritmica (Gasteropodi tipo Nautilus, avvolgimento delle foglie attorno ad un fusto, vortici, galassie, etc. . .) e come serie di Fibonacci (numero di petali dei fiori, crescita di *alcune* piante, etc. . .). La sua diffusione soccombe nettamente davanti a pattern più basilari, ad esempio la simmetria. Spesso anzi, essa rappresenta l'eccezione anziché la regola, come nel caso delle configurazioni dei cristalli, in cui la sua presenza è limitata ai quasi-cristalli, riscontrati solo in alcune leghe dell'alluminio. Per quanto riguarda la sua presenza in determinate distanze tra i pianeti, o nelle proporzioni del DNA, occorre tornare, almeno per quanto riguarda i primi, al problema della tolleranza delle misure e dell'intelligente Hans. In breve Φ è senz'altro un sistema morfogenetico della natura, ma non bisogna idolatrarlo, poichè non è l'unico e non è il più diffuso.

Tra i vari aspetti, particolarmente interessante è il legame tra la sua caratteristica di "numero più irrazionale" e l'ottimizzazione dello spazio, che si ritrova in molte piante.

C.1 Φ nella morfogenesi delle piante

Nella breve esposizione degli aspetti matematici, abbiamo visto come Φ possieda la particolarità di essere l'ultimo numero irrazionale, cioè il più difficile da approssimare tra tutti i numeri esistenti.

Poteva sembrare un virtuosismo matematico, ma in realtà questa caratteristica trova applicazione in natura, e particolarmente nella morfogenesi delle piante ad andamento spiroidale, come pigne, cactus, fiori, etc. . .

Milioni di anni di evoluzione hanno infatti imposto una condizione fondamentale per una maggiore probabilità di riproduzione della specie: produrre e conservare il più alto numero possibile di semi.

Il problema si pone dunque nell'ottimizzare la 'compattazione' modulare, nello spazio ma anche nel tempo[49] di molti elementi all'interno di un invulcro limitato. Ovviamente tutto dipende dalla forma di quest'ultimo e degli elementi che lo devono riempire. Per uno spazio di forma quadrata o rettangolare, l'optimum sarebbe facilmente ottenuto da una serie di oggetti quadrati, come avviene per le mattonelle dei pavimenti. Si tratta di un problema che in realtà l'architettura e l'urbanistica devono affrontare molto spesso; si pensi al caveau di una biblioteca, che deve contenere il più alto nu-

[49]La pianta non perde la sua ottimizzazione durante la crescita!

mero di scaffali nel minor spazio possibile, senza perdere tale ottimizzazione con il crescere del numero dei libri, oppure alla progettazione di quartieri ad alta densità, dove tutte le abitazioni (al pari dei semi di un fiore) devono ricevere aria e luce nel modo più omogeneo possibile[50], senza però dimenticare la possibilità di una espansione del quartiere stesso…

Ovviamente la natura non può servirsi di contenitori squadrati, poichè la massima area a parità di perimetro viene racchiusa dalla forma circolare, che quindi risulta molto migliore. D'altronde la crescita radiale, uniforme in tutte le direzioni, è senz'altro la più semplice ed efficace da ottenere, e sarebbe impossibile con forme quadrate o rettangolari. Proprio tale tipo di sviluppo radiale viene a determinare una formazione ad anelli concentrici, che spesso vediamo nel taglio dei tronchi di albero. Nonostante lo sviluppo avvenga in maniera continua, gli anelli si trovano a determinati intervalli discreti. Su ogni anello compare uno ed un solo *primordium*, ossia una delle gemme che poi daranno luogo a semi, foglie, spine etc… Tutti gli anelli,

Figura 18: I primordium per $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 0.48$ e $\alpha = \frac{3}{5}$

insieme con il primordium che ospita, vengono poi spinti all'esterno da ogni nuova formazione che nasce al centro del fusto. All'inizio tale processo causa un ingrossamento radiale della pianta stessa, ma poi, quando questa giunge al suo diametro massimo, l'effetto della nascita di nuove gemme centrali si scarica sulla distanza tra gli anelli, anche di vecchia formazione, che viene compressa, sino a costipare tutti i primordium.

Da tempo si supponeva che queste gemme nascessero secondo ben precisi angoli di divergenza α, ma solo nel 1993 due ricercatori francesi, Stéphane Douady e Yves Couder hanno dato una dimostrazione matematica di questo fenomeno.

Prima di procedere dobbiamo osservare che per quanto riguarda questo angolo, la parte intera del numero di giri può essere trascurata. Questo significa che dire che vengono compiuti 1.5 giri, o 2.5 giri o …100.5 giri, partendo sempre dallo stesso punto, equivale a dire che vengono fatti 0.5 giri, poichè si finisce sempre nella stessa posizione.

[50] D'altronde ritroviamo modelli simili nell'urbanistica spontanea medioevale, o in quella dell'antica Grecia

In questa sede ci limiteremo solo ad una dimostrazione intuitiva del principio base di Douady e Couder, per cui nel posizionamento di due primordium consecutivi avviene una rotazione di Φ giri, pari cioè ad 1.618 rotazioni, che per quanto detto sopra corrispondono a 0.618 per 360 gradi, ossia a gradi 222.492...

Dunque, immaginando di vedere dall'alto la crescita radiale, ad esempio, di una pigna, potremmo divertirci a simulare cosa accadrebbe con angoli diversi da questo. Iniziamo con un angolo razionale: 1/2 di giro. Su ogni cerchio consecutivo i primordium sarebbero tra loro sfasati di 180°, ma questo darebbe luogo a due sole file di gemme, con un'incredibile spreco di spazio.

Inoltre, le proprietà meccaniche di una tale struttura sarebbero ben inferiori, per resistenza agli sforzi e alle aggressioni atmosferiche, a quella circolare, che però si ottiene utilizzando un altro angolo di divergenza.

Provando ad esempio un angolo di poco inferiore a 0.5, come può esserlo 0.48, osserviamo che le due file sembrano ruotare attorno al centro, disponendo i primordium in assetto spiroidale. Tuttavia lo spreco di spazio sarebbe ancora notevole. Cosa accadrà utilizzando un valore di α pari a 0.6 ? Benchè

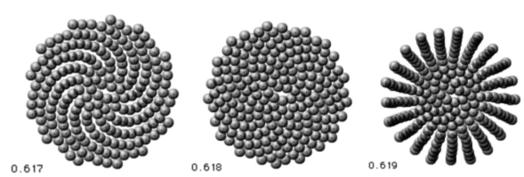

Figura 19: I primordium per $\alpha = 0.617$, $\alpha = \Phi$ e $\alpha = 0.619$

si tratti di un numero abbastanza prossimo al valore aureo, inaspettatamente le gemme si disporrebbero in modo ancora meno valido di quello ottenuto con $\alpha = 0.48$, formando semplicemente 5 file in cui le ultime gemme sarebbero schiacciate. Questo avviene perchè 0.6 è un numero razionale, che si trasforma in frazione senza bisogno di approssimazioni:

$$0.6 = \frac{3}{5}$$

Dunque, ogni 3 giri, le gemme tornano a posizionarsi esattamente con lo stesso angolo, pari ad 1/5 di giro. Questo si verifica ovviamente per qualsiasi frazione, o meglio, per qualsiasi *numero razionale*.

Si comprende dunque il motivo per cui un numero irrazionale è sicuramente da preferirsi per le piante: esso non posiziona mai due gemme con lo stesso angolo. Tuttavia, sebbene questo artifizio risolva il problema della ripetitività, esso non è sufficiente per quello dell'ottimizzazione dello spazio.

Per superare il secondo ostacolo il numero oltre ad essere irrazionale, deve risultare anche molto difficile da approssimare, in modo tale da lasciare la minor quantità possibile di spazi vuoti e da realizzare una distribuzione uniforme che non vada a schiacciare le gemme. Anzi, esso deve essere il più irrazionale tra i numeri... e ovviamente, tale numero è Φ !

Riferimenti bibliografici

[1] R. P. Angier. The aesthetics of unequal division. *Psychological Review*, 4:541–561, 1903.

[2] Rudolf Arnheim. *The power of the center: A study of composition in the visual arts (rev. ed.)*. University of California Press, Berkeley e Los Angeles, 1983.

[3] Eugenio Battisti. *Filippo Brunelleschi*. Electa, Milano, 1981.

[4] J. Benjafield. The golden rectangle: some new data. *American Journal of Psychology*, 89:737–743, 1976.

[5] D. E. Berlyne. The golden section and hedonic judgments of rectangles: A cross-cultural study. *Sciences de l'art*, 7:1–6, 1970.

[6] D. E. Berlyne. *Aesthetics and Psychobiology*. Appleton-Century-Crofts, New York, 1971.

[7] H. R. Schiffman D. J. Bobko. Preference in linear partitioning: The golden section reexamined. *Perception and Psychophysics*, 24:102–103, 1978.

[8] Frans Boselie. The aesthetic attractivity of the golden section. *Psychological Research*, 45:367–375, 1984.

[9] Frans Boselie. Complex and simple proportions and the aesthetic attractivity of visual patterns. *Perception*, 13:91–96, 1984.

[10] Frans Boselie. The golden section has no special aesthetic attractivity! *Empirical Studies of the Arts*, 10:1–18, 1992.

[11] Frans Boselie. The golden section and the shape of objects. *Empirical Studies of the Arts*, 15:131–141, 1997.

[12] Carl B. Boyer. *Storia della matematica*. Oscar Saggi. Mondadori, Milano, 1990. Introd. Lucio Lombardo Radice.

[13] David M. Burton. *The History of Mathematics: An Introduction*. Allyn and Bacon, Boston, 1989.

[14] S. Ross C. W. Neinstedt. Preferences for rectangular proportions in college students and the aged. *Journal of Genetic Psychology*, 78:153–158, 1951.

[15] Le Corbusier. *The Modulor. A Harmonious Mesasure to the Human Scale Universally Applicable to Architecture and Mechanics*. Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1954.

[16] T. H. Haines & A. E. Davies. The psychology of aesthetic reaction to rectangular. *Psychological Review*, 11:248–281, 1904.

[17] Stanislas Dehaene. *Il pallino della matematica*. Oscar Saggi Scienze. Mondadori, Milano, 2000.

[18] Erodoto. *Le storie di Erodoto*. Classici U.T.E.T. U.T.E.T., 1996. A cura di Aristide Colonna e Fiorenza Bevilacqua.

[19] R. P. Farnsworth. Preference for rectangles. *Journal of General Psychology*, 7:479–481, 1932.

[20] G. T. Fechner. Über die frage des golden schnitts (sulla questione della sezione aurea). *Archiv für die zeichnenden Künste (Archivio per le arti grafiche)*, 11, 1865.

[21] G. T. Fechner. *Zür experimentalen Aesthetik*. S. Hirzel, Lipsia, 1871.

[22] G. T. Fechner. *Vorschule der Aesthetik (Manuale di estetica)*. Breitkopf & Härtel, Lipsia, 1876.

[23] Roger Fischler. The early relationship of le corbusier to the 'golden number'. In *Environment and planning B6*, pages 95–103. Simon & Schuster, 1979.

[24] D. H. Fowler. A generalization of the golden section. *Fibonacci quarterly*, 20:146–158, 1982.

[25] H. Frank. *Kybernetische Analysen subjektiver Sachverhalte*. Schnelle, Quickborn, 1964.

[26] Martin Gardner. *Fads and Fallacies in the Name of Science*. Dover, New York, 1957.

[27] Richard J. Gillings. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. MIT press, Cambridge, 1972.

[28] M. Godkewitsch. The "golden section": an artifact of stimulus range and measure of preference. *American Journal of Psychology*, 87:269–277, 1974.

[29] Christopher D. Green. All that glitters: A review of psychological research on the aesthetics of the golden section. *Perception*, 24:937–938, 1995.

[30] Holger Höge. Fechner's experimental aesthetics and the golden section hypothesis today. *Empirical Studies of the Arts*, 13:131–148, 1995.

[31] Holger Höge. The golden section hypothesis - its last funeral. *Empirical Studies of the Arts*, 15:233–255, 1995.

[32] William Hogart. Wanton chase. *Analysis*, page 25, 1753.

[33] Georges Ifrah. *The Universal History of Numbers*. Harvill, London, 1998.

[34] M. Saunders J. Benjafield, E. Pomeroy. The golden section and the accuracy with which proportions are drawn. *Canadian Journal of Psychology*, 34:253–256, 1980.

[35] T. M. Nelson J. M. Hintz. Golden section: Reassessment of the perimetric hypothesis. *American Journal of Psychology*, 83:126–129, 1970.

[36] T. M. Nelson J. M. Hintz. Haptic aesthetic value of the golden section. *British Journal of Psychology*, 62:217–223, 1971.

[37] Paul-Alan Johnson. *The Theory of Architecture: Concepts, Themes and Practices*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1994.

[38] O. Külpe. *Outlines of psychology based upon the results of experimental investigation*. Macmillan, New York, 1895. Traduzione in inglese a cura di E. B. Titchener, dalla versione tedesca del 1893.

[39] C. Lalo. *L'esthétique expérimentale contemporaine*. Félix Alcan, Paris, 1908.

[40] George Markowsky. Misconceptions about the golden ratio. *The College Mathematics Journal*, 23:2–19, 1992.

[41] I. C. McManus. The aesthetics of simple figures. *British Journal of Psychology*, 71:505–524, 1980.

[42] Pierre Von Meiss. *Elements of Architecture. From Form to Place*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.

[43] Kurt Mendelssohn. *L'enigma delle piramidi*. Oscar Storia. Mondadori, Milano, 1990.

[44] H. J. Eysenck & O.Tunstall. La personalité et l'esthétique des formes simples. *Sciences de l'art*, 5:3–9, 1968.

[45] J. Piehl. The golden section: The 'true' ratio? *Perceptual and Motor Skills*, 46:831–834, 1978.

[46] E. Pierce. Aesthetics of simple forms. *Psychological Review*, 1:483–495, 1894.

[47] E. Pierce. Aesthetics of simple forms. ii. the functions of the elements. *Psychological Review*, 3:270–282, 1896.

[48] H. R. Schiffman. Golden section:preferred figural orientation. *Perception and Psychophysics*, 1:193–194, 1966.

[49] H. R. Schiffman. Figural preference and the visual field. *Perception and Psychophysics*, 6:92–94, 1969.

[50] D. Norton & L. Stark. Eye movements and visual perception. *Scientific American*, ?:219–227, 1971.

[51] W. D. K. Macrosson & G. C. Strachan. The preference amongst product designers for the golden section in line partitioning. *Empirical Studies of the Arts*, 15:153–163, 1997.

[52] G. M. Stratton. Eye-movements and the aesthetics of visual form. *Philosophische Studien*, 20:336–359, 1902.

[53] G. M. Stratton. Symmetry, linear illusions, and the movements of the eye. *Psychological Review*, 24:82–96, 1906.

[54] L. T. Svensson. Note on the golden section. *Scandinavian Journal of Psychology*, 18:79–80, 1977.

[55] G. G. Thompson. The effect of chronological age on aesthetic preferences for rectangles of different proportions. *Journal of Experimental Psychology*, 36:50–58, 1946.

[56] E. B. Titchener. *An outline of psychology*. Macmillan, New York, 1899.

[57] Herbert Westren Turnbull. The great mathematicians. In *The world of mathematics*, pages 75–168. Simon & Schuster, New York, 1956. A cura di James R. Newman.

[58] B. Steele W. C. Shipley, P. E. Dattman. The influence of size on preferences for rectangular proportion in children and adults. *Journal of Experimental Psychology*, 37:333–336, 1947.

[59] L. Witmer. Zur experimentellen aesthetik einfacher räumlicher formverhältnisse (sull'estetica sperimentale delle relazioni spaziali semplici). *Philosophische Studien*, 9:96–144;209–263, 1894.

[60] R. S. Woodworth. *Experimental Psychology.* Henry Holt, New York, 1938.

[61] W. Wundt. Die geometrisch-optischen täuschungen. *Abs. sächs. Ges. Wiss. math.-phys. Cl*, 24:53–178, 1898.

[62] A. Zeising. *Neue Lehre von den Proportionen des menschlischen Körpers (Nuova teoria sulle proporzioni del corpo umano).* Weigel, Lipsia, 1854.

[63] A. Zeising. *Äesthetische Forschungen (Ricerche estetiche).* Medinger, Francoforte, 1855.

[64] A. Zeising. *Der goldene Schnitt (La sezione aurea).* Englemann, Lipsia, 1884.

[65] L. Zusne. *Visual perception of form.* Academic Press, New York, 1970.