

CALCOLO DEI PREDICATI DEL I ORDINE

Dizionario

- Simboli descrittivi

lettere o *variabili* proposizionali: p, q, r, \dots A, B, C, \dots

lettere o *variabili* predicative: P, Q, R, \dots

lettere o *variabili* individuali: a, b, c, \dots x, y, z, \dots

- Simboli logici: **connettivi**

Negazione \sim *Congiunzione* \wedge *Disgiunzione* \vee

Implicazione o condizionale \rightarrow *Equivalenza* \leftrightarrow

- Simboli logici: **quantificatori**

quantificatore esistenziale \exists

quantificatore universale \forall

- Simboli grafici:

parentesi $() [] \dots$ segni di interpunzione $, .$

QUANTIFICATORI

- **Universale affermativa**

$\forall(x) S(x)$ *Tutti sono studenti*

- **Universale negativa**

$\forall(x) \sim S(x)$ *Tutti non sono studenti*

- **Esistenziale (o particolare) affermativa**

$\exists(x) S(x)$ *Qualcuno è studente*

- **Esistenziale (o particolare) negativa**

$\exists(x) \sim S(x)$ *Qualcuno non è studente*

EQUIVALENZE CON LA NEGAZIONE

- $\forall(x) S(x) \leftrightarrow \sim \exists(x) \sim S(x)$
- $\forall(x) \sim S(x) \leftrightarrow \sim \exists(x) S(x)$
- $\sim \forall(x) S(x) \leftrightarrow \exists(x) \sim S(x)$
- $\sim \forall(x) \sim S(x) \leftrightarrow \exists(x) S(x)$

DIMOSTRAZIONI CON LA LOGICA DEI PREDICATI

REGOLE DI INFERENZA

1) Eliminazione di \forall
$$\frac{(\forall x) P(x)}{P(a)}$$

Significato: da una premessa universale si può sempre inferire una conclusione singolare (caso particolare)

2) Eliminazione di \exists
$$\frac{(\exists x) P(x)}{P(a)}$$

* Controllo variabili

Significato: da una premessa esistenziale si può inferire una premessa singolare (esemplificazione) purchè si controlli la sostituzione (la stessa costante individuale non può sostituire più variabili)

3) Introduzione di \forall
$$\frac{P(a)}{(\forall x) P(x)}$$

* Controllo inferenza : $P(a)$ deve sempre essere ricavata da precedenti premesse universali.

4) Introduzione di \exists
$$\frac{P(a)}{(\exists x) P(x)}$$

Significato: da una premessa singolare si può sempre inferire una conclusione esistenziale (particolare)

Caso 1 : dimostrazione del sillogismo “barbara” (A A A)

Date le premesse:

- 1) Tutti i Greci sono Europei.
- 2) Tutti gli Ateniesi sono Greci.

deduciamo la conclusione:

- 3) Tutti gli Ateniesi sono Europei.

1. $(\forall x) [G(x) \rightarrow E(x)]$ I premessa
2. $(\forall x) [A(x) \rightarrow G(x)]$ II premessa
3. $G(a) \rightarrow E(a)$ 1. eliminazione \forall
4. $A(a) \rightarrow G(a)$ 2. eliminazione \forall
5. $A(a) \rightarrow E(a)$ 3.4. transitività
6. $(\forall x) [A(x) \rightarrow E(x)]$ 5. introduzione \forall

NB: la riga 6. dell’inferenza è corretta perché le formule singolari sono derivate da precedenti formule universali

Caso 2: dimostrazione con Q esistenziale “Darii” (A I I)

Date le premesse:

- 1) Tutti i professori parlano inglese.
- 2) Alcuni romagnoli sono professori.

Deduciamo la conclusione:

- 3) Alcuni romagnoli parlano inglese.

1. $(\forall x) [P(x) \rightarrow I(x)]$	I premessa
2. $(\exists x) [R(x) \wedge P(x)]$	II premessa
3. $P(a) \rightarrow I(a)$	1. eliminazione \forall
4. $R(a) \wedge P(a)$	2. eliminazione \exists
5. $R(a)$	4. semplificazione
6. $P(a)$	4. semplificazione
7. $I(a)$	3.6. Modus Ponens
8. $R(a) \wedge I(a)$	5.7. Congiunzione
9. $(\exists x) [R(x) \wedge I(x)]$	8 introduzione \exists

NB: il Q esistenziale può essere eliminato perché 2. è vera in quanto premessa, può poi essere reintrodotta in 9.

Caso 3. una premessa particolare negativa "Baroco" (A O O)

Date le premesse:

- 1) Tutti i felini sono mammiferi.
- 2) Alcuni alcuni animali non sono mammiferi.

Deduciamo la conclusione:

- 3) Alcuni animali non sono felini.

1. $(\forall x) [F(x) \rightarrow M(x)]$	I premessa
2. $(\exists x) [A(x) \wedge \neg M(x)]$	II premessa
3. $F(a) \rightarrow M(a)$	1. eliminazione \forall
4. $A(a) \wedge \neg M(a)$	2. eliminazione \exists
5. $A(a)$	4. semplificazione
6. $\neg M(a)$	4. semplificazione
7. $\neg F(a)$	3.6. Modus Tollens
8. $A(a) \wedge \neg F(a)$	5.7. congiunzione
9. $(\exists x) [A(x) \wedge \neg F(x)]$	8. introduzione \exists

Caso 4. una premessa universale negativa “Festino” (E I O)

Date le premesse:

- 3) Nessun felino depone le uova.
- 4) Alcuni animali depongono uova.

Deduciamo la conclusione:

3) Alcuni animali non sono felini.

- | | |
|---|---------------------------|
| 1. $(\forall x) [F(x) \rightarrow \neg U(x)]$ | I premessa |
| 2. $(\exists x) [A(x) \wedge U(x)]$ | II premessa |
| 3. $F(a) \rightarrow \neg U(a)$ | 1. eliminazione \forall |
| 4. $A(a) \wedge U(a)$ | 2. eliminazione \exists |
| 5. $A(a)$ | 4. semplificazione |
| 6. $U(a)$ | 4. semplificazione |
| 7. $\neg \neg U(a)$ | 6. Doppia negazione |
| 8. $\neg F(a)$ | 3.7. Modus Tollens |
| 9. $A(a) \wedge \neg F(a)$ | 5.7. congiunzione |
| 10. $(\exists x) [A(x) \wedge \neg F(x)]$ | 8. introduzione \exists |

NB: per applicare il Modus Tollens dobbiamo negare il conseguente $\neg U(a)$, ottenendo $\neg(\neg U(a)) = U(a)$ che ci consente poi di derivare l'antecedente negato $\neg F(a)$

Questi esempi mostrano la perfetta simmetria tra le strutture deduttive del sillogismo e la logica dei predicati che ne esprime le proprietà formali.

Caso 4. fallacia Il figura

Date le premesse:

- 1) Tutti i felini sono mammiferi.
- 2) Tutti i cani sono mammiferi.

ricaviamo la conclusione fallace (falsa):

- 3) Tutti i cani sono felini.

Mostriamo che non si può procedere con una dimostrazione

1. $(\forall x) [F(x) \rightarrow M(x)]$ I premessa
2. $(\forall x) [C(x) \rightarrow M(x)]$ II premessa
3. $F(a) \rightarrow M(a)$ 1. eliminazione \forall
4. $C(a) \rightarrow M(a)$ 2. eliminazione \forall

- non possiamo applicare transitività e non possiamo procedere con la dimostrazione:

TRANSITIVITA' : $(A \rightarrow B \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

Il termine B svolge due ruoli diversi, **conseguente** nel primo condizionale e poi **antecedente** nel secondo condizionale : è questo che consente la transitività nella derivazione.

Ma nell'esempio $B = M(a)$ è in entrambi i casi conseguente.