Proposizioni e verità

Claudia Casadio

Logica e Psicologia del Pensiero

Laurea Triennale - Parte Istituzionale

A.A. 2007-08

Contents

1. Proposizione

Con proposizione (o enunciato) si intende una asserzione dichiarativa ben formata in tutte le sue parti (requisito sintattico) e dotata di un senso compiuto (requisito semantico). Le seguenti sono proposizioni:

Tutti gli uomini sono mortali
La terra è un pianeta
L'acqua è H_2O
$4 + 3 = 7$
3 è il successivo di 2

La logica studia le proposizioni non isolatamente, ma nelle loro relazioni con altre proposizioni, nell'ambito di linguaggi formali o calcoli. In particolare la logica studia i processi che conducono da una proposizione, o da un insieme di proposizioni, ad altre proposizioni. Tali processi sono chiamati inferenze o deduzioni.

2. Verità

Con il termine VERO si intende corrispondente ai fatti. Ad esempio, l'enunciato:

Questo tavolo è quadrato.

è Vero se e solo se, nella situazione in cui esso viene proferito, vi è un tavolo e tale tavolo è quadrato.

Se non si danno queste condizioni, se lo stato di fatto delle cose è diverso da quanto viene asserito, l'enunciato è FALSO.

3. Aristotele

La nozione di verità è stata così caratterizzata da Aristotele:

> **Vero è dire di ciò che è, che è, e di ciò che non è, che non è. Falso è dire di ciò che è, che non è, e di ciò che non è, che è.**

Una definizione rigorosa di verità è un problema complesso su cui è sempre aperta la discussione. Il concetto di verità definito dal logico polacco A. Tarski si richiama alla concezione di Aristotele e sviluppa la nozione di verità come corrispondenza ai fatti.

La logica delle proposizioni (Calcolo degli Enunciati o Calcolo Proposizionale) ammette un procedimento effettivo per la determinazione della verità basato sul metodo delle tavole di verità.

La logica predicativa (o Calcolo dei Predicati del primo ordine) ed i sistemi di ordine superiore al primo, tuttavia, non possiedono un metodo effettivo per decidere in un tempo finito se una proposizione di un linguaggio L è vera in L.

È possibile stabilire se una proposizione è Vera facendo ricorso alla nozione di dimostrazione. Un risultato fondamentale della logica moderna è stato stabilire un nesso tra Verità e dimostrabilità: sono proposizioni Vere di un sistema formale (calcolo logico) L tutti e solo i suoi teoremi (proposizioni dimostrabili in L).

4. Verità e significato

La teoria formale della verità rimanda all'analisi del significato di Frege. Secondo Frege un oggetto è designato con un nome (o segno). Nel saggio Sinn und Bedeutung (1892), Frege mostra come nomi diversi possano essere usati per fare riferimento allo stesso oggetto: ad esempio, le due designazioni la stella della sera e la stella del mattino si riferiscono allo stesso corpo celeste, il pianeta Venere.

Per chiarire il comportamento dei nomi (segni) nel linguaggio Frege analizza il loro significato nei termini della essenziale dicotomia tra:

senso (sinn)

denotazione o riferimento (bedeutung).

Un nome proprio (parola o segno singolo o combinazione di segni) esprime il suo senso e designa il suo riferimento o denotazione.

Il senso è qualcosa attraverso cui l'oggetto può venire scelto come oggetto d'attenzione, è il modo in cui l'oggetto ci è dato. Le due espressioni la stella della sera, la stella del mattino hanno la stessa denotazione (il pianeta Vener), ma senso diverso, ovvero sono due modi diversi per designare lo stesso pianeta.

Il senso di una espressione è il pensiero che essa esprime e nel, caso degli enunciati, la denotazione è uno dei due valori di verità (il Vero, il Falso). Un enunciato, infatti, designa il VERO nel caso in cui il pensiero da esso espresso corrisponda allo stato di fatto delle cose.

La distinzione tra senso e denotazione permette di definire condizioni di verità per gli enunciati complessi a partire dalle condizioni di verità delle proposizioni che li costituiscono. In tal modo, Frege ha posto le basi per una analisi semantica delle

espressioni non solo dei linguaggi formalizzati, ma anche del linguaggio ordinario.

5. La nozione di funzione

Se un simbolo semplice o complesso ricorre in uno o più posti in una espressione il cui contenuto può essere un possibile contenuto di giudizio, e se noi pensiamo che questo simbolo sia sostituibile in ognuno, o in alcuni, dei posti in cui esso ricorre, con un altro simbolo, purchè il simbolo sostituito sia ovunque lo stesso, allora quella parte dell'espressione che risulta invariante è definita funzione, mentre quella parte che è sostituibile è definita argomento.

Una proposizione può essere considerata come una particolare funzione se uno dei suoi elementi viene analizzato come un appropriato argomento. Avremo allora una funzione proposizionale; ad esempio:

F = . . . è più leggero dell'anidride carbonica

è una funzione che dà luogo ad una proposizione per argomenti come:

x = idrogeno, ossigeno ...

L'analisi funzionale della proposizione può essere rappresentata con:

F(x)

la proposizione si scompone in due elementi, uno stabile, ma incompleto, la funzione F, l'altro variabile e atto a saturare il primo, l'argomento x. Va tenuto presente che al variare del valore della variabile x, varia il significato della proposizione risultante dalla funzione.

L'approfondimento della nozione di funzione si è dimostrato rilevante non solo a livello della applicazione della logica alla matematica, nel quadro della discussione sui fondamenti, ma anche a

livello della analisi del linguaggio, nello studio del significato attraverso l'analisi del concetto e la teoria del senso e della denotazione delle espressioni linguistiche.

6. Sistemi formali

Gli oggetti e le forme della logica sono studiati in appositi sistemi formali o calcoli simbolici. La sillogistica, ad esempio, è un particolare sistema formale che studia le proprietà degli argomenti che valgono per insiemi di proposizioni.

La logica contemporanea, a partire dal lavoro pionieristico di G. Frege, ha sviluppato un'ampia tipologia di sistemi formali alla cui base troviamo il Calcolo delle Proposizioni e il Calcolo dei Predicati del primo ordine.

Il Calcolo delle Proposizioni o logica enunciativa ha come oggetti proposizioni o enunciati e studia le proprietà logiche delle proposizioni complesse (molecolari) che si possono formare a partire da un insieme (finito o infinito) di proposizioni atomiche, mediante l'applicazione di un certo numero (finito) di operatori e connettivi proposizionali. Gli elementi strutturali più semplici - atomi - sono proposizioni:

Proposizione atomica: Carlo è un medico

Proposizione molecolare: Carlo è un medico e Piero è triste

Il Calcolo dei Predicati del I Ordine (First Order Logic) ha come oggetti i costituenti essenziali delle proposizioni: nomi (termini) e predicati, che a loro volta possono essere proprietà (valgono di un termine) o relazioni (valgono di due o più termini)

nome: Carlo proprietà: è un medico

termine: a proprietà: P proposizione: P(a)

nomi: Carlo, Piero relazione: è amico di

termini: a, b relazione: R proposizione: R(a, b)

7. Connettivi e funzioni di verità

Definizione	Notazione	Significato
Negazione	$\sim$	non si dà il caso che
Congiunzione	$\wedge$	e, et, and
Disgiunzione (inclusiva)	$\vee$	o, or, vel
Implicazione o condizionale	$\rightarrow$	se ... allora
Equivalenza o bicondizionale	$\leftrightarrow$	se e solo se

7.1. Tavole di Verità

La costruzione di tavole di verità osserva le seguenti regole:

i) Ad ogni assegnazione di valori di verità V o F alle lettere enunciative (variabili proposizionali) che compaiono in una formula, corrisponde un valore di verità per la formula enunciativa;

ii) questo valore è determinato mediante un procedimento finito di computazione basato sulle funzioni di verità dei connettivi;

iii) perciò ciascuna formula enunciativa determina una funzione di verità che può essere rappresentata graficamente da una tavola di verità per la formula enunciativa;

iv) in una tavola di verità ciascuna riga rappresenta una assegnazione di valori di verità alle lettere enunciative e il corrispondente valore assunto dalla funzione di verità associata ad un connettivo per quella assegnazione;

v) ciascuna colonna rappresenta i valori assunti da una delle funzioni di verità associate ai connettivi e la colonna sottostante al connettivo principale rappresenta la funzione di verità determinata dalla formula enunciativa;

vi) se in una formula enunciativa vi sono n lettere diverse, si hanno 2^n possibili assegnazioni di valori di verità alle lettere enunciative e quindi 2^n righe nella tavola di verità.

7.2. Tavole dei 5 connettivi

A	$\sim$ A
V	F
F	V

A	B	A $\wedge$ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	A $\vee$ B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	B	A $\longrightarrow$ B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	A $\longleftrightarrow$ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

7.3. Tautologie e contraddizioni

Una formula enunciativa si dice una tautologia se la funzione di verità da essa determinata assume sempre il valore V (Vero) per qualsiasi assegnazione di valori alle sue lettere enunciative.

Una formula enunciativa si dice una contraddizione se la funzione di verità da essa determinata assume sempre il valore F (Falso) per qualsiasi assegnazione di valori alle sue lettere enunciative.

Altrimenti, una formula enunciativa si dice contingente:
la sua funzione assume il valore vero per certe assegnazioni alle sue lettere enunciative e il valore falso per altre assegnazioni alle sue lettere enunciative.

8. Leggi Logiche

Alcune tautologie sono di particolare interesse perchè esprimono leggi che valgono nella logica classica, sulla base delle funzioni di verità definite per i connettivi $\sim$, $\wedge$, $\vee$.

8.1. Leggi classiche

- **Legge della Doppia Negazione - DN**

  $\sim (\sim \mathbf{A}) \leftrightarrow \mathbf{A}$

- **Principio di Non Contraddizione - NC**

  $\sim (\mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{A})$

- **Pricipio del Terzo Escluso - TE**

  $\mathbf{A} \vee \sim \mathbf{A}$

8.2. Leggi de Morgan

$\sim (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow (\sim \mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B})$

$\sim (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow (\sim \mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B})$

8.3. Notazione di Hilbert

$\sim$ **A** **viene scritto** $\bar{A}$ $\sim$ **A** $\vee$ **B** **viene scritto** $\bar{A} \vee B$

$\sim$ **(A** $\wedge$ **B)** **viene scritto** $\overline{A \wedge B}$

$\sim$ **(A** $\vee$ **B)** **viene scritto** $\overline{A \vee B}$

dunque avremo le trasformazioni:

$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$ $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$

9. Regole di inferenza

La logica delle proposizioni ammette vari tipi di regole di inferenza, denominate in base al connettivo che vi compare, in particolare avremo:

- **regole condizionali o implicative con il connettivo** $\rightarrow$
- **regole regole congiuntive con il connettivo** $\wedge$
- **regole additive con il connettivo** $\vee$

9.1. Regole condizionali

MODUS PONENS

$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$
$\mathbf{A}$

$\mathbf{B}$

MODUS TOLLENS

$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$
$\sim \mathbf{B}$

$\sim \mathbf{A}$

FALLACIA NEGAZ. ANTEC.

$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$
$\sim \mathbf{A}$

$*\!\sim \mathbf{B}$

FALLACIA AFF. CONS.

$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$
$\mathbf{B}$

$*\mathbf{A}$

9.2. Regole congiuntive

CONGIUNZIONE	SEMPLIFICAZIONE I	SEMPLIFICAZIONE II
$\dfrac{\mathbf{A} \quad \mathbf{B}}{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}$	$\dfrac{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}{\mathbf{A}}$	$\dfrac{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$

9.3. Regole additive

ADDIZIONE	SILLOG. DISGIUNT.I	SILLOG. DISGIUNT.II
$\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}}$	$\dfrac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \quad \sim \mathbf{A}}{\mathbf{B}}$	$\dfrac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \quad \sim \mathbf{B}}{\mathbf{A}}$

1. Galileo Galilei è un matematico.
2. Galileo Galilei è un astronomo.
$\bowtie$ Galileo Galilei è un matematico e un astronomo.

1. Il sole è un corpo celeste ed una stella.
2. Il sole è un corpo celeste.
$\bowtie$ Il sole è una stella.

1. Un italiano beve vino.
$\bowtie$ Un italiano beve vino o acqua.

1. Piero è vegetariano o diabetico.
2. Piero non è diabetico.
$\bowtie$ Piero è vegetariano.