# Corso di Logica e Psicologia del Pensiero

Prof. Claudia Casadio

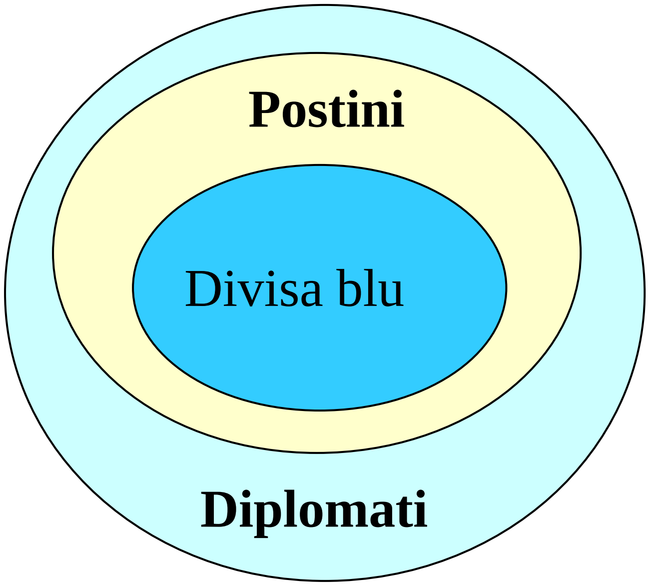
Laurea Triennale in Psicologia
Università di Chieti

# Rappresentazione delle figure sillogistiche mediante i diagrammi della teoria degli insiemi

Tutti i postini sono diplomati

Tutti gli impiegati con la divisa blu sono postini

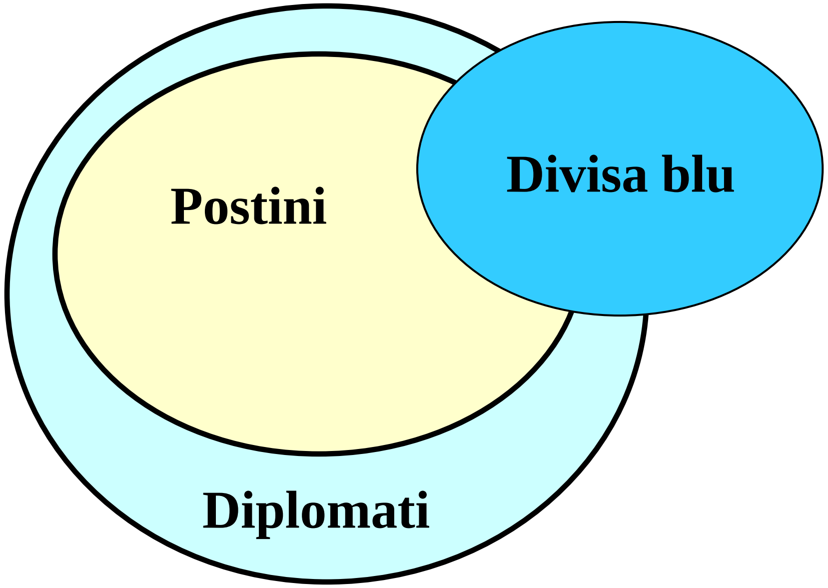
Tutti gli impiegati con la divisa blu sono diplomati



Tutti i postini sono diplomati

Qualche impiegato con la divisa blu non è diplomato

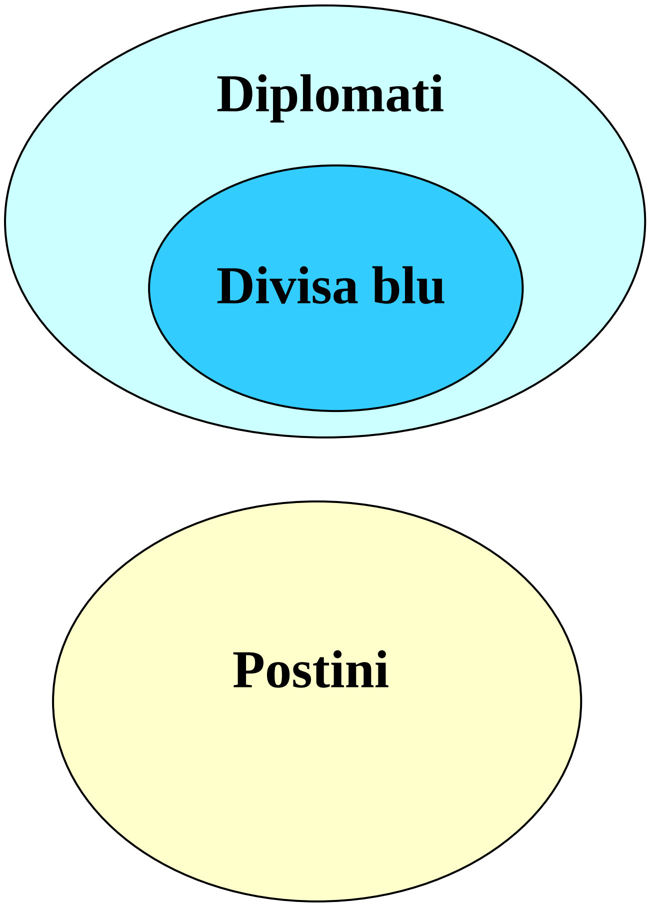
Qualche impiegato con la divisa blu non è un postino



Nessun postino è diplomato

Tutti gli impiegati con la divisa blu sono diplomati

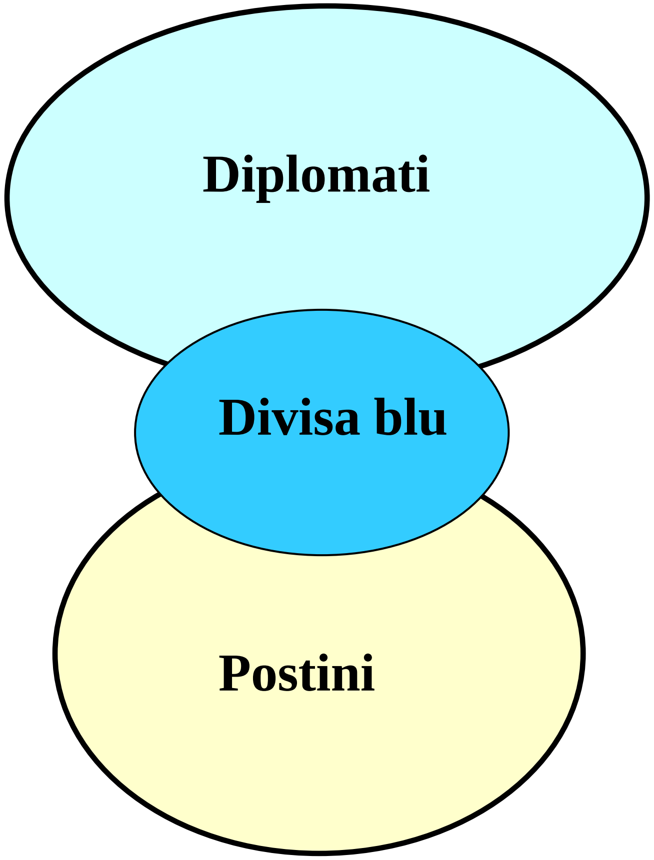
Nessun impiegato con la divisa blu è un postino



Nessun postino è diplomato

Qualche impiegato con la divisa blu è diplomato

Qualche impiegato con la divisa blu non è un postino



# Logica Proposizionale o Calcolo delle Proposizioni

## Dizionario

Simboli descrittivi: ***lettere*** o ***variabili*** proposizionali

p, q, r, …   A, B, …

Simboli logici: ***connettivi***

| | | |
|---|---|---|
| *Negazione* | $\sim$ | *non* |
| *Congiunzione* | $\wedge$ | *e - and* |
| *Disgiunzione* | $\vee$ | *o – or - vel* |
| *Implicazione* o *condizionale* | $\rightarrow$ | *se … allora* |
| *Equivalenza* o *bicondizionale* | $\leftrightarrow$ | *se e solo se* |

Simboli grafici: parentesi ( ) [ ] … segni di interpunzione , .

# Logica Proposizionale (CP) : formule

- Formule atomiche

  p , q , …

- Formule molecolari

  $\sim p$ , $p \wedge q$ , $q \vee r$ , $A \rightarrow B$ , $A \leftrightarrow B$

  $\sim (p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

- Variabili proposizionali

  A , B , …

# CP : Regole

- Modus Ponens MP

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

due premesse

una conclusione

- Modus Tollens MT

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \sim B \end{array}}{\sim A}$$

due premesse

una conclusione

- Forme Invalide o **Fallacie**

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \end{array}}{*A}$$

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \sim A \end{array}}{* \sim B}$$

# Esempi : MP

1. Se Giorgio è canadese, allora parla due lingue.
2. Giorgio è canadese.

∴ Giorgio parla due lingue.

1. Se Anna corre e salta, allora corre.
2. Anna corre e salta.

∴ Anna corre.

1. Se $3 + 6 = 9$, allora $9 – 6 = 3$.
2. $3 + 6 = 9$.

∴ $9 – 6 = 3$.

# Esempi : MT

1. Se Maria cammina, non corre.
2. Maria corre. (= ~ ~ corre)

∴ Maria non cammina.

1. Se l'acqua ha raggiunto 100 g.c., allora bolle.
2. L'acqua non bolle.

∴ L'acqua non ha raggiunto 100 g.c.

1. Se questo poligono ha tre lati, non è un quadrato.
2. Questo poligono è un quadrato.

∴ Questo poligono non ha tre lati.

# Fallacie

- Se Napoleone avesse vinto, la lingua europea sarebbe il Francese.
- Napoleone non ha vinto.

•Niente ne consegue

1. Se l'Europa fosse unita, non sarebbe una costellazione di stati.
2. L'Europa non è una costellazione di stati.

•Niente ne consegue

# Connettivi : negazione

Se A è una proposizione, ~A denota la negazione di A, con la tavola di verità

| A | ~A |
|---|---|
| **V** | **F** |
| **F** | **V** |

*Condizione*:

se A è Vera, ~A è falsa;  se A è Falsa, ~A è Vera

# Connettivi : disgiunzione

Se A, B sono proposizioni, la proposizione A $\vee$ B è la loro disgiunzione, con la seguente tavola di verità

| A | B | A $\vee$ B |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** |

Condizione: A $\vee$ B è Vera se o A è Vera, o B è Vera o entrambe sono Vere. A $\vee$ B è Falsa se e solo se sia A che B sono False

# Connettivi : congiunzione

Se A, B sono proposizioni, la proposizione $A \wedge B$ è la loro congiunzione, con la seguente tavola di verità

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **F** |

*Condizione*: $A \wedge B$ è Vera se e solo se sia A che B sono Vere

# Connettivi : condizionale

Se A, B sono proposizioni, la proposizione $A \rightarrow B$ (A implica B, se A allora B) è il condizionale (A : *antecedente*, B: *conseguente*), con la tavola di verità

| A | B | $A \rightarrow B$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **V** |

*Condizione*: $A \rightarrow B$ è Falsa sse A è Vera e B è Falsa

# Analisi del condizionale

- $A \rightarrow B$ Se il mare è salato, allora l'ora ha 60 minuti
  V V
- $A \rightarrow \sim B$ Se il mare è salato, allora l'ora non ha 60 minuti
  V F
- $\sim A \rightarrow B$ Se il mare non è salato, allora l'ora ha 60 minuti
  F V
- $\sim A \rightarrow \sim B$ Se il mare non è salato, allora l'ora non ha 60 minuti
  F F

# Connettivi : equivalenza

Se A, B sono proposizioni, A $\leftrightarrow$ B (A se e solo se B) è una proposizione, con la seguente tavola di verità

| A | B | A $\leftrightarrow$ B |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **V** |

*Condizione*: A $\leftrightarrow$ B è Vera se e solo se A e B sono entrambe Vere, o entrambe False

# Tautologie e contraddizioni

Una formula enunciativa si dice una **tautologia** se la funzione di verità da essa determinata assume sempre il valore **V** (Vero) per qualsiasi assegnazione di valori alle sue lettere enunciative.

Una formula enunciativa si dice una **contraddizione** se la funzione di verità da essa determinata assume sempre il valore **F** (Falso) per qualsiasi assegnazione di valori alle sue lettere enunciative.

Altrimenti, una formula enunciativa si dice **contingente**: la sua funzione assume il valore Vero per certe assegnazioni alle sue lettere enunciative e il valore Falso per altre assegnazioni alle sue lettere enunciative.

# Leggi logiche

Le seguenti proposizioni valgono come leggi logiche:

- *Leggi De Morgan*

$$\sim(A \vee B) \leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$$

$$\sim(A \wedge B) \leftrightarrow \sim A \vee \sim B$$

- *Leggi Distributive*

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

# Leggi logiche

- Doppia negazione

$$A \leftrightarrow \sim\sim A$$

- Terzo escluso

$$A \vee \sim A$$

- Non contraddizione

$$\sim (A \wedge \sim A)$$

- Condizionale

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \sim A \vee B$$

# Leggi logiche

$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$

$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$

$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$

*Leggi Commutative*

$(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

$(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$

*Leggi Associative*

$A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$

$A \rightarrow B \leftrightarrow \sim B \rightarrow \sim A$

*Contrapposte*

$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$

# Regole di inferenza

- **Congiunzione**

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}$$

- **Semplificazione**

$$\frac{p \wedge q}{p} \qquad \frac{p \wedge q}{q}$$

- **Addizione**

$$\frac{p}{p \vee q}$$

- **Sillogismo disgiuntivo**

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \end{array}}{q} \qquad \frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim q \end{array}}{p}$$

# Esempi

- Galileo era un matematico.
- Galileo era un astronomo.

∴ Galileo era un matematico e un astronomo.

- Il sole è un corpo celeste ed una stella.

∴ Il sole è un corpo celeste.

∴ Il sole è una stella.

- Un italiano beve vino.

∴ Un italiano beve vino o acqua.

- Piero è vegetariano o diabetico.
- Piero non è diabetico.

∴ Piero è vegetariano.

# Wason: 4 carte

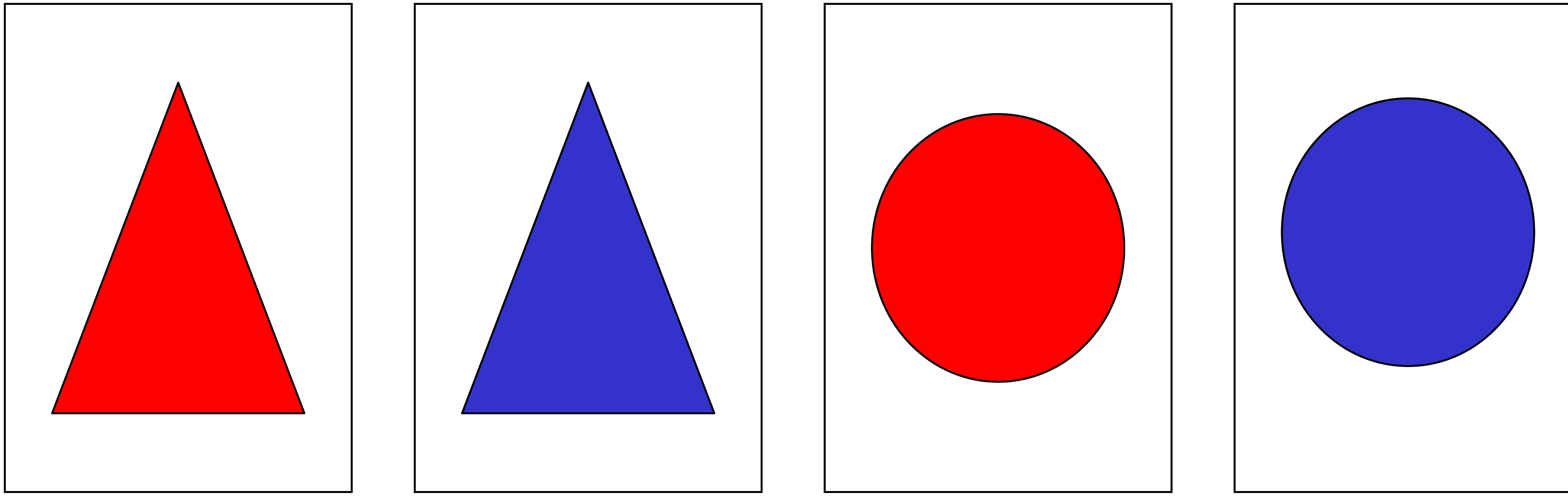
Si consideri questo problema : 4 carte sono poste davanti a voi mostrando rispettivamente un triangolo rosso, un triangolo blu, un cerchio blu ed un cerchio rosso. Voi sapete già che ciascuna carta ha un triangolo su uno dei lati ed un cerchio sull'altro, e che sono usati solo due colori: rosso e blu.

Regola : *Se una carta ha un triangolo rosso su un lato, allora ha un cerchio blu sull'altro.*

Problema : Dire quali carte bisogna voltare per dimostrare se la regola data è Vera o Falsa

* P. C. Wason, *Regression in reasoning*, “Br. J. Psychol.”, 60, 4, 1969.

# Problema delle 4 carte



Soluzione : triangolo rosso e cerchio rosso

# Calcolo dei Predicati del I Ordine

## Dizionario

- Simboli descrittivi

  ***lettere*** o ***variabili*** proposizionali: p, q, r, … A, B, C, …

  ***lettere*** o ***variabili*** predicative: P, Q, R, …

  ***lettere*** o ***variabili*** individuali: a, b, c, … x, y, z, …

- Simboli logici: ***connettivi***

  *Negazione* ~ *Congiunzione* $\wedge$ *Disgiunzione* $\vee$

  *Implicazione* o *condizionale* $\rightarrow$ *Equivalenza* $\leftrightarrow$

- Simboli logici: ***quantificatori***

  quantificatore esistenziale $\exists$ quantificatore universale $\forall$

- Simboli grafici: parentesi ( ) [ ] … segni di interpunzione , .

# CPred Formule

- Formule atomiche

  $P(a)$ , $Q(x)$ , $R(a, b)$ , $Z(a, b, c)$

- Formule molecolari

  $\sim P(a)$ , $\forall(x)(Q(x) \rightarrow R(a, x))$ , $\exists(x)P(x)$

- Formule aperte

  $\sim P(x)$ , $Q(x) \rightarrow R(a, x)$

- Formule chiuse

  $\forall(x)(Q(x) \rightarrow R(a, x))$ , $\exists(x)P(x)$

# Quantificatori

- Universale affermativa

  $\forall(x)\ S(x)$ *Tutti sono studenti*

- Universale negativa

  $\forall(x)\ \sim S(x)$ *Tutti non sono studenti*

- Esistenziale affermativa

  $\exists(x)\ S(x)$ *Qualcuno è studente*

- Esistenziale negativa

  $\exists(x)\ \sim S(x)$ *Qualcuno non è studente*

# Equivalenze

- $\forall(x)\, S(x) \leftrightarrow \sim\exists(x) \sim S(x)$
- $\forall(x) \sim S(x) \leftrightarrow \sim\exists(x)\, S(x)$
- $\sim\forall(x)\, S(x) \leftrightarrow \exists(x) \sim S(x)$
- $\sim\forall(x) \sim S(x) \leftrightarrow \exists(x)\, S(x)$

# Proposizioni

- *Tutti i viaggiatori sono arrivati*

$$\forall(x)[V(x) \rightarrow A(x)]$$

equivalente a

$$\sim\exists(x)\ [V(x) \wedge \sim A(x)]$$

- *Nessun viaggiatore è arrivato*

$$\forall(x)[V(x) \rightarrow \sim A(x)]$$

equivalente a

$$\sim\exists(x)\ [V(x) \wedge A(x)]$$

# Proposizioni

- *Qualche viaggiatore è arrivato*

$$\exists(x)[V(x) \land A(x)]$$

equivalente a

$$\sim\forall(x)[V(x) \rightarrow \sim A(x)]$$

- *Qualche viaggiatore non è arrivato*

$$\exists(x)[V(x) \land \sim A(x)]$$

equivalente a

$$\sim\forall(x)[V(x) \rightarrow A(x)]$$

# Regole di inferenza

- Eliminazione ∀ $$\frac{\forall(x)\ P(x)}{P(a)}$$

- Eliminazione ∃ $$\frac{\exists(x)\ P(x)}{P(a)}$$

  * Controllo variabili

- Introduzione ∀ $$\frac{P(a)}{\forall(x)\ P(x)}$$

  * Controllo inferenza P(a)

- Introduzione ∃ $$\frac{P(a)}{\exists(x)\ P(x)}$$

# Dimostrazioni

Date le premesse:

1) Tutti i viaggiatori sono arrivati
2) Tutti i pendolari sono viaggiatori

deduciamo la conclusione:

3) Tutti i pendolari sono arrivati

1. $\forall(x)[V(x) \rightarrow A(x)]$ premessa I
2. $\forall(x)[P(x) \rightarrow V(x)]$ premessa II
3. $V(a) \rightarrow A(a)$ eliminazione $\forall$
4. $P(a) \rightarrow V(a)$ eliminazione $\forall$
5. $P(a) \rightarrow A(a)$ 3,4 transività
6. $\forall(x)[P(x) \rightarrow A(x)]$ introduzione $\forall$ $\therefore$

Date le premesse:

1) Tutti i pendolari sono viaggiatori

2) Alcuni universitari sono pendolari

deduciamo la conclusione:

3) Alcuni universitari sono viaggiatori

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall(x)[P(x) \rightarrow V(x)]$ | premessa I |
| 2. | $\exists(x)[U(x) \wedge P(x)]$ | premessa II |
| 3. | $P(a) \rightarrow V(a)$ | eliminazione $\forall$ |
| 4. | $U(a) \wedge P(a)$ | eliminazione $\exists$ |
| 5. | $P(a)$ | semplificazione |
| 6. | $U(a)$ | semplificazione |
| 7. | $V(a)$ | 3,5 MP |
| 8. | $U(a) \wedge V(a)$ | congiunzione |
| 9. | $\exists(x)[U(x) \wedge V(x)]$ | introduzione $\exists$ $\therefore$ |

# Controllo delle Ipotesi

Gli esperimenti sulla decisione (cf. problema del THOG) hanno mostrato che le persone

- sono capaci di individuare una particolare ipotesi e di stabilirne le conseguenze
- ma hanno difficoltà o non sono capaci di stabilire le conseguenze di due ipotesi, non sapendo quale sia quella giusta
- effetto disgiunzione nelle scelte in condizioni di incertezza (Legrenzi e Girotto 1998)

# Disgiunzione esclusiva

Se A, B sono proposizioni, A $\veebar$ B (*AUT* A, *AUT* B)

è una proposizione, con la seguente tavola di verità

| A | B | A $\veebar$ B |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **F** |
| **V** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** |

*Condizione*: A $\veebar$ B è Vera se e solo se o è Vera A o è Vera B ma non entrambe; è Falsa se e solo se sono entrambe Vere o entrambe False.